Soluzioni triennio 2011

1. Il trattore

La risposta esatta è: 39,6

Detto x il numero dei giri compiuto dalle ruote posteriori, dalla relazione $2{,}2x = 1{,}8\ (x + 4000)$ si ricava $x = 18000$, per cui il percorso è lungo metri $18000 \cdot 2{,}2 = 39{,}6$ km.

2. Un problema sul quadrato

La risposta esatta è: 1/4

Infatti, se consideriamo i due triangoli PBM e MCQ, essi hanno due angoli retti PBM = MCQ, inoltre gli angoli PMB e MQC sono uguali perché complementari dello stesso angolo QMC.
I due triangoli PBM e MCQ quindi sono simili.
Ne ricaviamo, CM/PB = QC/BM, cioè PB · QC = CM · BM = 1/2 · 1/2 = 1/4

3. I quadrati perfetti

La risposta esatta è: 24

Deve aversi:

$k + 1 = x^2$ (1) $\qquad$ $2k + 1 = y^2$ (2) $\qquad$ con x e y interi.

Eliminando k dalle 2 equazioni, si ottiene, facilmente: $2x^2 - y^2 = 1$ (3)

La (2) ci dice che y deve essere dispari; ricavando, allora, x^2 dalla (3) e ponendo $y = 2m + 1$, si ricava:

$x^2 = \dfrac{1 + y^2}{2} = 2m^2 + 2m + 1$ (4) , da cui si desume che anche x deve essere dispari.

Procedendo per tentativi a partire dal valore $m = 1$, il secondo membro della (4) risulta un quadrato perfetto per $m = 3$. Si ottiene, allora, per tale valore di m: $x = 5$, $y = 7$ mentre, dalla (1), si ricava: $k = 24$

4. Le infinite circonferenze

La risposta esatta è: $12 \cdot \pi \cong 37{,}699$

La lunghezza di una circonferenza è diametro · π, e di conseguenza la somma di tutte le (infinite) circonferenze sarà (la somma di tutti i diametri) · π. Ma la somma di tutti i diametri è uguale all'altezza del triangolo isoscele $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. La somma delle lunghezze di tutte le circonferenze è quindi $12 \cdot \pi \cong 37{,}699$ cm

5. Il quadrato magico

Le risposte esatte sono:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

6. Il concorso

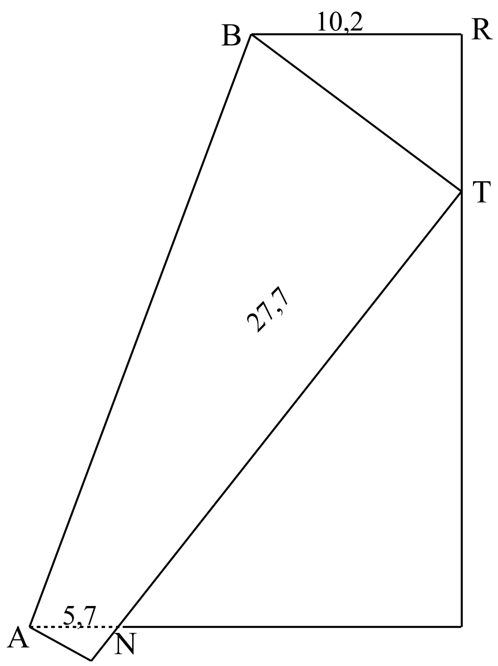
La risposta esatta è: 6

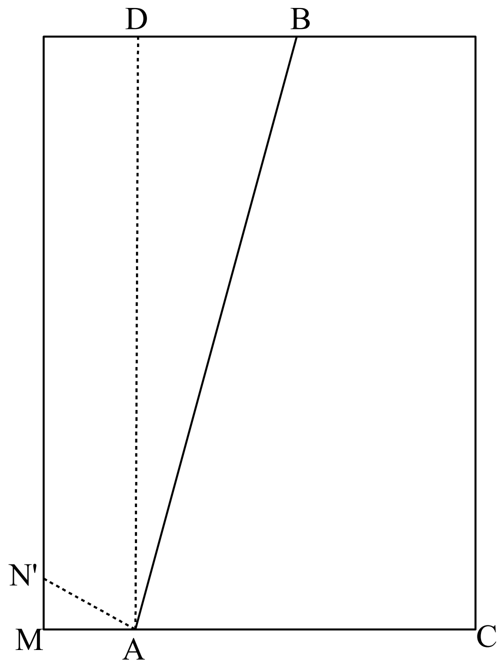
I candidati che hanno superato almeno una delle prove sono stati 75-18 = 57, ma tra loro nessuno le ha superate tutte e tre. Il numero delle prove che sono state superate è invece dato da 51+39+24=114. Ora se 57 candidati hanno superato 114 prove e nessuno ne ha superate tre, ogni candidato deve aver superato due prove. Questo ci permette di arrivare alla soluzione poiché dei 57 candidati che hanno superato due prove, ben 51 hanno superato la prova di lingua straniera, i 6 che non l'hanno superata devono aver superato le due prove di cultura generale e di matematica.

7. La piega

La risposta esatta è: AB = 30,2 cm

BR =10,2cm
AN = 5,7cm
NT =27,7cm





MN' = 29,7 – NT = 29,7 - 27,7 = 2,0 cm

MA = $\sqrt{(AN')^2 - (MN')^2} = \sqrt{5,7^2 - 2,0^2} \cong 5,3$ cm

AC = 21 – MA = 21 - 5,3 = 15,7 cm

DB = AC – BR = 15,7 - 10,2 = 5,5 cm

AB = $\sqrt{(AD)^2 + (DB)^2} = \sqrt{29,7^2 + 5,5^2} = 30,2$ cm

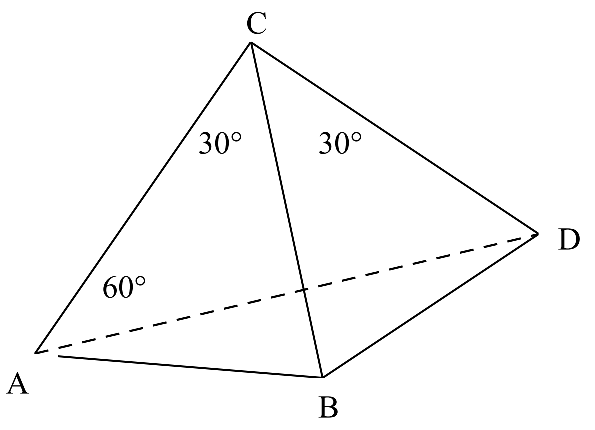
8. Le tre scatole

La risposta esatta è: <u>è possibile conoscere il contenuto di tutte e tre le scatole estraendo una sola pallina.</u>

Siccome le etichette su tutte e tre le scatole sono sbagliate, basta estrarre una pallina dalla scatola segnata NB. Ammesso che la pallina estratta sia nera si deduce che l'altra deve essere nera altrimenti l'etichetta sarebbe giusta. Avendo individuato la scatola NN si può individuare il contenuto della scatola BB infatti non può contenere due palline bianche altrimenti l'etichetta sarebbe giusta e non può contenere due palline nere perché la scatola che le contiene è già stata individuata perciò deve contenerne una bianca e una nera. La terza scatola sarà quella che contiene le due palline bianche. Si risolve con lo stesso ragionamento se la pallina estratta dalla scatola NB risulta bianca anziché nera.

9. Guerra aerea

La risposta esatta è: <u>i tre ragazzi sono ciascuno alla stessa distanza dagli altri due</u>



Dai dati del problema si ha: CA = CB; BA = BD; $A\hat{B}C = C\hat{B}D = 75°$;

Il triangolo ABC è isoscele sulla base AB e pertanto $C\hat{A}B = C\hat{B}A = 75°$
e $A\hat{C}B = 180°-75°-75° = 30°$

Il triangolo ABD è isoscele sulla base AD ed ha l'angolo al vertice

$A\hat{B}D = A\hat{B}C + C\hat{B}D = 75° + 75° = 150°$,
e gli angoli alla base $B\hat{A}D = A\hat{D}B = \frac{180° - 150°}{2} = 15°$

i triangoli ACB e BCD sono congruenti per il primo criterio di congruenza avendo AB = BD; BC in comune e $A\hat{B}C = C\hat{B}D = 75°$; ne consegue:

$B\hat{C}D = 30°$ e $C\hat{D}B = 75°$;
$C\hat{A}D = C\hat{A}B - D\hat{A}B = 75°-15° = 60°$;
$C\hat{D}A = C\hat{D}B - A\hat{D}B = 75-15° = 60°$;
$A\hat{C}D = A\hat{C}B + B\hat{C}D = 30°+30° = 60°$;

pertanto il triangolo ADC è equiangolo e quindi equilatero cioè AC = CD = AD e quindi Aldo, Dino e Carlo sono ciascuno alla stessa distanza degli altri due.

10. Le età nascoste

La risposta esatta è: Anna ha 28 anni e Lucia 21

	Ieri	Oggi	domani
Anna	y	$2x$	$63-2x$
Lucia	x	y	$2x$

Sapendo che il tempo trascorre per tutti allo stesso modo si ha:
$2x - y = y - x$ e $63 - 2x - 2x = 2x - y$
risovendo il sistema si ha $x = 14$ e $y = 21$ da cui $2x = 28$.