Soluzioni Triennio 2017

1. Il viaggiatore in anticipo

Soluzione [55 min]

Il viaggiatore ha camminato per 55 minuti prima di esser preso in macchina dalla moglie. Dato che essi arrivano a casa 10 min prima del solito, ciò significa che la moglie ha ridotto di 10 min il tempo usuale del viaggio di andata e ritorno dalla stazione, ossia di 5 min il tempo di andata alla stazione. Ne segue che essa ha incontrato il marito 5 min prima dell'ora solita ossia alle 16:55.

2. I tennisti

Soluzione [23]

Nelle 5 somme totali l'età di ogni giocatore compare 4 volte, ciò significa che 124 + 128 + 130 + 136 + 142 = 660 è 4 volte la somma delle età di tutti i giocatori. Dunque la somma dell'età dei 5 giocatori è 660/4 = 165. Poiché la somma delle età dei quattro giocatori più anziani è 142, il giocatore più giovane ha 23 anni.

3. Le sfere

Soluzione [$2+2\sqrt{\frac{2}{3}}$]

Unendo i centri delle sfere a due a due si ottiene una piramide retta che ha per base e facce laterali tutti triangoli equilateri (tetraedro), la cui altezza cade nel baricentro della base. Con semplici calcoli si determina questa altezza alla quale vanno aggiunti il raggio delle sfere poste sul piano e quello della sfera sovrapposta per cui la soluzione è: $2+2\sqrt{\frac{2}{3}}$

4. Festa da ballo

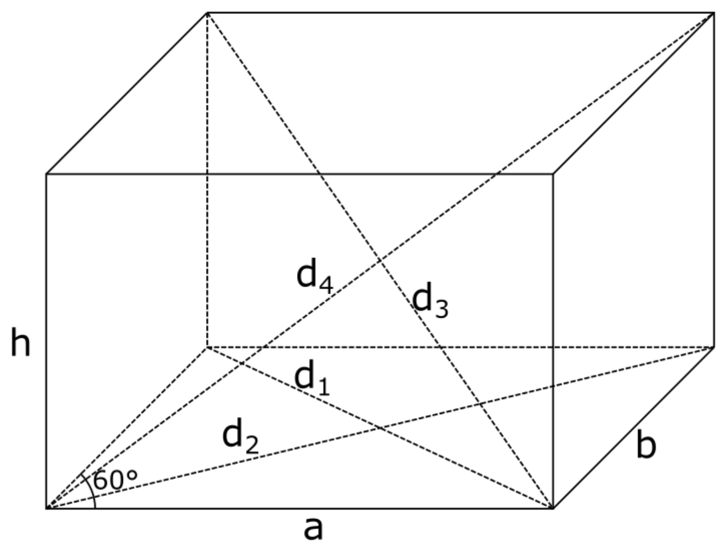
Soluzione [18]

una donna danza con 7 uomini
una seconda donna con 8 uomini
una terza donna con 9 uomini
n-esima donna con n+6 uomini
segue che il totale delle persone presenti alla festa è n + n + 6 = 42 da cui si ricava n = 18
per cui la risposta è 18

5. Tre naturali in fila

Siano n-1, n, n+1 i tre numeri naturali consecutivi. Allora $(n-1)^3 + n^3 = (n+1)^3$ e
$n^3-1-3n^2 + 3n + n^3 = n^3 + 1 + 3n^2 + 3n$ cioè
$n^3-6n^2 = 2$
$n^2(n-6) = 2$
deve essere $n-6 > 0$ cioè $n > 6$, pertanto $n^2 \geq 49$ e $n^2(n-6)$ sarà un numero maggiore di 2.
L'uguaglianza $(n-1)^3 + n^3 = (n+1)^3$ è impossibile
oppure
Siano n, n+1, n+2 i tre numeri naturali consecutivi. Allora $n^3 + (n+1)^3 = (n+2)^3$
e $n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8$ cioè
$n^3- 3n^2 - 9n - 7 = 0$
Le uniche soluzioni intere positive possono essere 1 e 7. Ma $1^3 + 2^3 \neq 3^3$ e $7^3 + 8^3 \neq 9^3$
L'uguaglianza $n^3 + (n+1)^3 = (n+2)^3$ è impossibile

6. Le diagonali

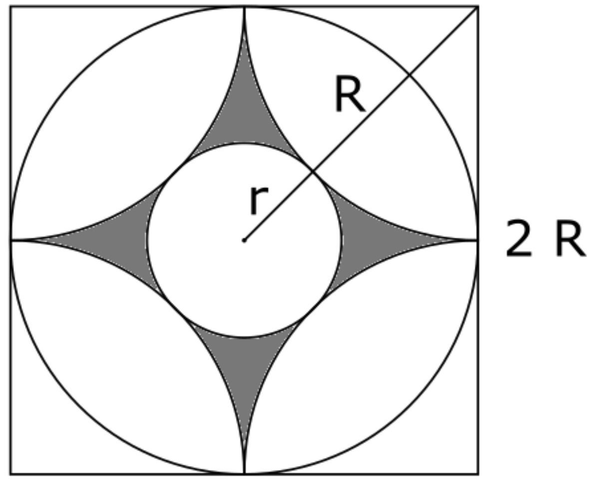


Per il teorema di Carnot le diagonali di base sono rispettivamente
$d_1^2 = a^2+b^2-2ab\cos 60° = a^2+b^2- ab$
$d_2^2 = a^2+b^2-2ab\cos 120° = a^2+b^2 + ab$
e poiché la più piccola diagonale del parallelepipedo è uguale a d_2 possiamo calcolarci l'altezza del solido e cioè essendo $d_3 = d_2$
$h^2 = d_2^2 - d_1^2 = 2ab$ e allora
$d_4^2 = d_2^2 + h^2 = a^2+b^2 +3ab$
le diagonali delle facce saranno
$d_5^2 = a^2 +2ab$ $d_6^2 = b^2 +2ab$

7. Cerchi sovrapposti

Soluzione $[R^2(4 - \pi - \pi(3 - 2\sqrt{2}))]$

E' possibile calcolare l'area richiesta S sottraendo l'area del cerchio interno S_1 dall'area S_2 della parte di piano delimitata dai quattro archi di circonferenza. Costruendo un quadrato con i lati tangenti alla circonferenza negli "spigoli" di S_2 si ottengono quattro settori circolari la cui area è equivalente a quella di un cerchio di raggio R. E' possibile quindi calcolare S_2 come differenza tra l'area del quadrato e quella del cerchio equivalente ai quattro quadranti:



$$S_2 = (2R)^2 - \pi R^2 = R^2(4-\pi)$$

Il raggio della circonferenza interna è

$r = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1)$ e quindi

$$S_1 = \pi R^2(\sqrt{2} - 1)^2 = \pi R^2(3 - 2\sqrt{2})$$

$$S = S_2 - S_1 = R^2(4 - \pi - \pi(3 - 2\sqrt{2}))$$

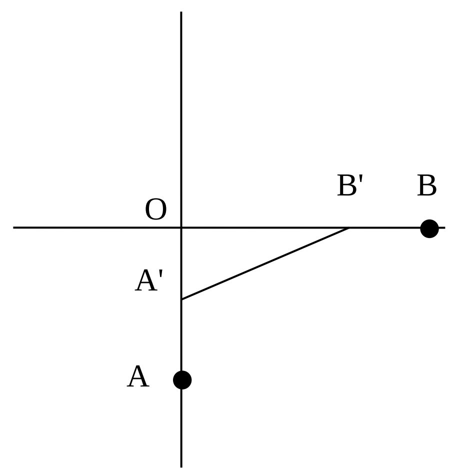
8. I due treni

Soluzione [62 min = $\frac{31}{30}$ h; 16 km]

Dopo x (ore) il primo treno si trova in A' ed ha percorso $(48\cdot x)$ km e il secondo treno si trova in B' ed ha percorso $(36\cdot x)$ km.

Di conseguenza OA' = $40 - 48x$ e OB' = $50 - 36x$ e

A'B' = $d = \sqrt{(40-48x)^2 + (50-36x)^2}$



$$d^2 = 1600 + 2304x^2 - 3840x + 2500 + 1296x^2 - 3600x$$

$$d^2 = 3600x^2 - 7440x + 4100$$

La funzione $y = d^2 = 3600x^2 - 7440x + 4100$ ammette minimo per $x = -\frac{b}{2a} = \frac{7440}{7200} = \frac{3720}{3600} = \frac{31}{30}$

Per $x = \frac{31}{30}$ si ha

$$d^2 = 3600\cdot\left(\frac{31}{30}\right)^2 - 7440\cdot\left(\frac{31}{30}\right) + 4100$$

$d^2 = 3844 - 7688 + 4100 = 256$ e $d = 16$

I due treni si trovano alla minima distanza tra loro dopo 3720 s = 62 min = $\frac{31}{30}$ h e la minima distanza è di 16 km.

9. Il problema di Matteo

Siano $n, n+1, n+2, n+3$ i quattro numeri naturali consecutivi.
Allora $n(n+3)\cdot(n+1)(n+2)+1 = (n^2+3n)\cdot(n^2+3n+2)+1 =$
$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2$ è il quadrato di n^2+3n+1

10. Bisettrici/Altezze

Siano α, β, γ gli angoli del triangolo assegnato ABC . Dette A', B', C' le intersezioni delle bisettrici in A, B, C con la circonferenza circoscritta e α', β', γ' gli angoli di A'B'C' , per il teorema degli angoli alla circonferenza si ottiene
$\alpha' = \beta/2 + \gamma/2$ $\gamma' = \alpha/2 + \beta/2$ e $\beta' = \alpha/2 + \gamma/2$
Poiché $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ si avrà che
$\alpha' = (\pi - \alpha)/2$, $\gamma' = (\pi - \gamma)/2$ e $\beta' = (\pi - \beta)/2$ se ne deduce che gli angoli di A'B'C' sono tutti acuti.
Detta H l'intersezione di AA' con B'C' si ha
AB'H = $\gamma/2$ B'AA' = $\alpha/2 + \beta/2$ dunque gli angoli AB'H e B'AA' sono complementari e quindi AHB' è retto.
Allo stesso modo si vede che CC' è perpendicolare ad AB e che BB' è perpendicolare ad AC (c.v.d.).