Soluzioni Triennio 2019

1. L'esame

<u>Soluzione</u> [49]

Se n il numero degli studenti promossi, $(70 - n)$ è il numero di quelli non promossi, allora
$66 \cdot 70 = 75 \cdot n + 45\,(70 - n)$ cioè $1470 = 30 \cdot n$ ed $n = 49$

2. I due treni

<u>Soluzione</u> [25 km]

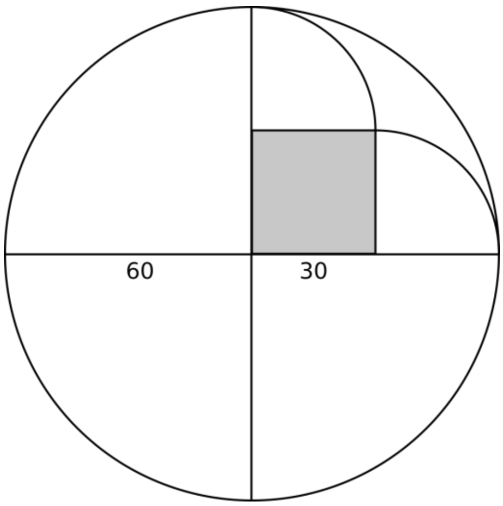
Se al tempo 0 i due treni si incontrano allora, 6 minuti prima, un treno deve percorrere $\frac{120}{10} = 12$ km e l'altro treno deve percorrere $\frac{130}{10} = 13$ km per raggiungere il punto di incontro.

3. Il cane Hugo e il prato

<u>Soluzione</u> $[3150\pi \text{ m}^2 \cong 9896 \text{ m}^2]$

Hugo descrive tre quarti di circonferenza di raggio 60 m con centro nel punto in cui è legato di area $\frac{3}{4}\pi \cdot 60^2 = 2700\pi \text{ m}^2$ e descrive due quarti di circonferenza di raggio 30 m di area $\frac{1}{2}\pi \cdot 30^2 = 450\pi \text{ m}^2$

Pertanto l'area cercata $3150\pi \text{ m}^2 \cong 9896 \text{ m}^2$



4. Il numero 5

Soluzione [21]

Escludendo lo zero i numeri a disposizione sono 1, 2, 3. Quindi si avranno le seguenti possibilità:
1, 1, 3 che dà 3 permutazioni
1, 2, 2 che dà 3 permutazioni.
Con uno zero si avrà: 0, 1, 4 che dà 6 permutazioni
0, 2, 3 che dà 6 permutazioni.
Con due zeri si avrà: 0. 0 , 5 che dà 3 permutazioni.
In conclusione sono 21 i modi possibili.

5. Gara di corsa

Soluzione [a) 10! =3.628.800; b) $\frac{1}{720}$ c) $\frac{1}{120}$]

a) I possibili ordini di arrivo sono le permutazioni di 10 elementi cioè P_{10} =10! =3.628.800

b) $p = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{720}$ oppure essendo il numero dei possibili gruppi differenti, formati dai primi 3, tenendo conto dell'ordine di arrivo, le disposizioni di 10 elementi presi 3 a 3 ($D_{10,3} = 720$), la probabilità di indovinare i primi tre concorrenti secondo l'ordine di arrivo è $p = \frac{1}{D_{10,3}} = \frac{1}{720}$

c) $p = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$ oppure essendo i possibili gruppi dei primi tre concorrenti senza distinzione interne di ordine d'arrivo le combinazioni di 10 elementi presi 3 a 3 ($C_{10,3} = 120$), la probabilità è $p = \frac{C_{3,3}}{C_{10,3}} = \frac{1}{120}$

6. Mai primo

Soluzione

Se a è la base del sistema di numerazione, la scrittura 100001 = $1 \cdot a^5 + 1 \cdot a^0$ rappresenta il numero $a^5 + 1$ che si fattorizza come $a^5 + 1 = (a+1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$

7. Le due circonferenze

Soluzione [$\frac{a^2}{2a-b}$; $\frac{2a^2 - 2ab + b^2}{2(2a-b)}$]

1) Sia r = OA il raggio della circonferenza esterna.
OF = $r - a$ e O'F > $r - a$
(O'F ipotenusa del triangolo O'OF)
Il raggio O'F = O'A = $\frac{2r-b}{2}$

Pertanto $\frac{2r-b}{2} > r - a$ e così $-b > -2a$ cioè $b < 2a$

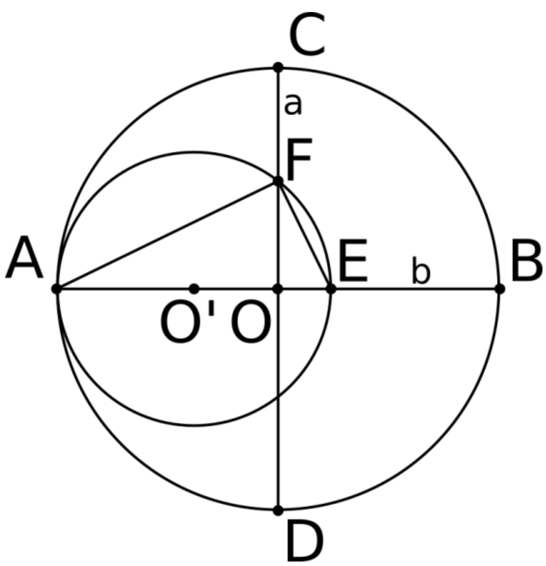
2) Essendo AFE un triangolo rettangolo (perché inscritto in una semicirconferenza) per il 2° teorema di Euclide risulta OF^2 = OA$\cdot$ OE cioè $(r-a)^2 = r \cdot (r-b)$

$r^2 - 2ra + a^2 = r^2 - rb$ ed $r = \frac{a^2}{2a-b}$

Il raggio della circonferenza interna O'A = $\frac{2r-b}{2}$

cioè O'A = $\left(\frac{2a^2}{2a-b} - b\right) \cdot \frac{1}{2}$

ovvero O'A = $\frac{2a^2 - 2ab + b^2}{2(2a-b)}$



8. La scimmia e le noci di cocco

Soluzione [79]

Sia n il numero di noci di cocco,

1° marinaio prende per se stesso $\frac{n-1}{3}$ e ne restano $n-\frac{n-1}{3}-1=\frac{2n-2}{3}$

2° marinaio prende $\left(\frac{2n-2}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{2n-5}{9}$ e ne restano $\frac{2n-2}{3}-\frac{2n-5}{9}-1=\frac{4n-10}{9}$

3° marinaio prende $\left(\frac{4n-10}{9}-1\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{4n-19}{27}$ ne restano $\frac{4n-10}{9}-\frac{4n-19}{27}-1=\frac{8n-38}{27}$

La scimmia ha preso 3 noci di cocco. Ogni marinaio prende al mattino

$\left(\frac{8n-38}{27}-1\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{8n-65}{81}$ Le noci di cocco sono n con n intero positivo. Pertanto

$8n-65=k\cdot 81$ deve essere multiplo di 81 (cioè 81, 162, 243, …).

Dando valori successivi a k si determina n (per $k=7$ $n=\frac{k\cdot 81+65}{8}=79$)

9. Lo yacht vincente

Soluzione [330 min = 5,5 ore]

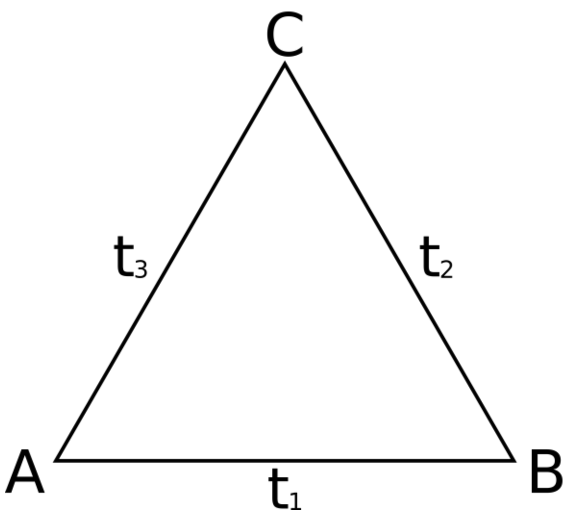
Sia l il lato del triangolo equilatero, allora $3l$ è l’intero percorso e $\frac{3}{4}\cdot 3l=\frac{9}{4}l=(\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{1}{4})l$.

Siano t_1, t_2, t_3 i tempi (in minuti) tra le boe A-B; B-C; C-A. Allora si ha il seguente sistema

$$\begin{cases} t_1+t_2+\frac{1}{4}t_3=210 \\ t_3+t_2+\frac{1}{4}t_1=270 \\ t_2-t_1=10 \end{cases}$$

che risolto fornisce la soluzione t_1 = 80 min; t_2 = 90 min; t_3 = 160 min.

Pertanto il tempo per coprire l’intero percorso è $t=(80+90+160)$ min = 330 min = 5,5 ore



10. Un'insolita parallela

Soluzione

Se $c < b < a$ sono le misure dei tre lati del triangolo, allora $b - c = a - b$ e $a + c = 2b$

Se r è il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo ABC, allora

Area (ABC) = $\frac{b \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{r}{2}(a + b + c)$

ovvero Area (ABC) = $\frac{3}{2} b \cdot r$

Se h è l'altezza relativa alla base b

Area (ABC) = $\frac{1}{2} b \cdot h$

Allora $\frac{3}{2} b \cdot r = \frac{1}{2} b \cdot h$ e $r = \frac{1}{3} h$

La parallela per il baricentro G ad AC divide tutti i segmenti uscenti da B nel rapporto 2:1 (teorema di Talete) e quindi passa per I (incentro) che dista da AC $r = \frac{1}{3} h$