Soluzioni Triennio 2020

1. Il rapporto

Soluzione [10]

Siano b = SR la base minore ed h l'altezza del trapezio. Allora l'area del trapezio PQRS = $\frac{(b+4b)\cdot h}{2}$ e l'area del triangolo MRS = $\frac{1}{2}\cdot\left(b\cdot\frac{h}{2}\right)$ e il loro rapporto è $\frac{5b\cdot h}{2}\cdot\frac{4}{b\cdot h}=10$

2. L'età di Gianni

Soluzione [44]

Siano x, y, z rispettivamente l'età di Gianni, quella della figlia e quella dei tre gemelli. Si ha $\begin{cases} x^2+y^2+3z^2+1=1998 \\ x^2+14y+12z+1=71\cdot 29 \end{cases}$ e sottraendo membro a membro si ottiene $y^2-14y+3z^2-12z=-61$ cioè $y^2-14y+49+3z^2-12z+12=0$ ovvero $(y-7)^2+3(z-2)^2=0$ da cui $y=7$ e $z=2$.
Sostituendo in una equazione si ottiene $x=44$

3. La circonferenza in rete

Soluzione [20]

Le soluzioni intere dell'equazione $x^2+y^2=625$ sono 20:
$(\pm 25;\ 0)$ $(0;\pm 25)$ $(\pm 24;\ \pm 7)$ $(\pm 7;\pm 24)$ $(\pm 20;\ \pm 15)$ $(\pm 15;\ \pm 20)$

4. Maschi e femmine

Soluzione $[\frac{2}{5}=0{,}40]$

$$p(FFF)+p(MMM)=\frac{12}{16}\cdot\frac{11}{15}\cdot\frac{10}{14}+\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}\cdot\frac{2}{14}=\frac{11}{28}+\frac{1}{140}=\frac{56}{140}=\frac{2}{5}=0{,}40$$

5. All'alba vincerà …

Soluzione [Il ritratto è nello scrigno d'oro]

Se il ritratto fosse nello scrigno di piombo tutte e tre le affermazioni sarebbero vere il che è contrario ai dati del problema. Se il ritratto fosse nello scrigno d'argento tutte e tre sarebbero false il che è contrario ai dati del problema. Quindi il ritratto deve essere nello scrigno d'oro.

6. Fin che la barca va …

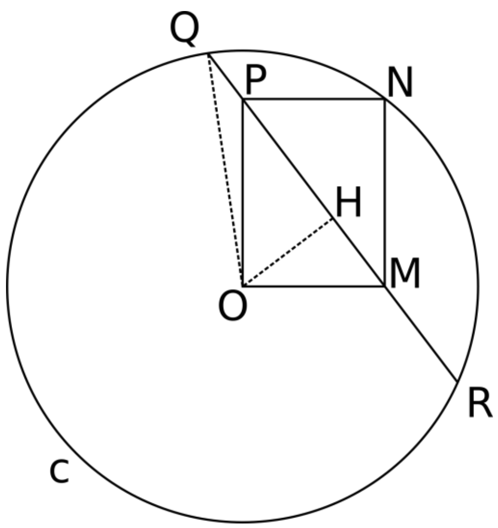
Soluzione [35 *h*]

Siano v_B la velocità della barca rispetto all'acqua ferma e v_C la velocità della corrente (o velocità della zattera). Allora, essendo $s = v \cdot t$, per la composizione di due moti simultanei, si ha
$5(v_B + v_C) = 7(v_B - v_C)$ e $v_B = 6 \cdot v_c$

Pertanto $s = 5 \cdot 7 v_C$ e $t = \frac{s}{v_C} = 35$

7. La corda

Soluzione $[2\sqrt{\frac{a^4 + b^4 + a^2b^2}{a^2 + b^2}}]$



Se OM = *a* e OP = *b*
il raggio della circonferenza **c** è ON = MP = $\sqrt{a^2 + b^2}$
Allora l'altezza del triangolo OMP rispetto alla base MP è

OH = $\frac{OM \cdot OP}{MP} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e

QH = $\sqrt{OQ^2 - OH^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a^4 + b^4 + a^2b^2}{a^2 + b^2}}$

Pertanto QR = $2 \cdot QH = 2\sqrt{\frac{a^4 + b^4 + a^2b^2}{a^2 + b^2}}$

8. Un insolito triangolo

<u>Soluzione</u> [4; 5; 6]

Area del triangolo =

$$\frac{1}{2} n \cdot (n+1)\sin 2\alpha = \frac{1}{2}(n+1)\cdot(n+2)\sin\alpha$$

cioè $n \cdot (n+1) \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = (n+1)\cdot(n+2)\sin\alpha$

e $\cos\alpha = \dfrac{n+2}{2n}$

Per il teorema del coseno:

$$n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2)\cos\alpha$$

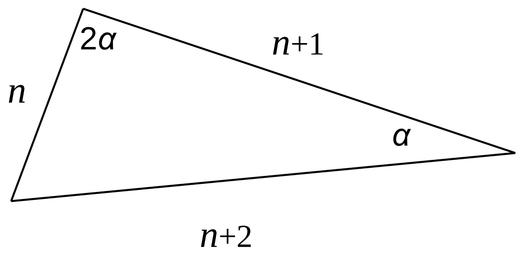
e sostituendo $\cos\alpha = \dfrac{n+2}{2n}$ si ha:

$$n^3 = n\cdot(n+1)^2 + n\cdot(n+2)^2 - (n+1)(n+2)^2$$

$$n^3 = n\cdot(n+1)^2 + (n+2)^2(n-n-1)$$

$n^2 - 3n - 4 = 0 \quad (n+1)(n-4) = 0$

e $n = 4 \qquad n+1 = 5 \qquad n+2 = 6$



9. Il prestito

Soluzione [563 euro]

Sia S la somma prestata.

	Somma rimborsata	Debito residuo
Alla fine del 1° anno	50	S-50
Alla fine del 2° anno	$\frac{1}{3}(S-50)$	S-50 - $\frac{1}{3}(S-50) = \frac{2}{3}(S-50)$
Alla fine del 3° anno	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(S-50) = \frac{2}{9}(S-50)$	$\frac{2}{3}(S-50)$ - $\frac{2}{9}(S-50) = \frac{4}{9}(S-50)$
Alla fine del 4° anno	$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(S-50) = \frac{4}{27}(S-50)$	$\frac{4}{9}(S-50)$ - $\frac{4}{27}(S-50) = \frac{8}{27}(S-50)$
Alla fine del 5° anno	$\frac{8}{27}(S-50)$	0

$\frac{8}{27}(S-50)$ è la somma che deve essere rimborsata alla fine del quinto anno. Pertanto

$\frac{8}{27}(S-50) > 145 \Rightarrow S > 539{,}375$ $\frac{8}{27}(S-50) < 155 \Rightarrow S < 573{,}175$

Poiché tutti i rimborsi sono espressi da un numero intero di euro, (S – 50) deve essere divisibile per 27, cioè S – 50 = 27·k ed S = 27·k + 50. Si ha pertanto k = 19 ed S = 563

10. Il marziano

Soluzione [8]

Sia $b > 0$ il numero di dita totale delle due mani, che è anche la base di numerazione rispetto alla quale il marziano esegue i calcoli. L'equazione si trasforma in $x^2 - (1\cdot b + 6)\,x + (4\cdot b + 1) = 0$

La differenza $x_2 - x_1$ $(x_2 > x_1)$ tra soluzioni di un'equazione di secondo grado vale $\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$, e questo valore deve essere uguale a b (perché 10 in base b è uguale a b). Pertanto, essendo $a = 1$, $\sqrt{\Delta} = b^2$ cioè $(b+6)^2 - 4(4b+1) = b^2$ ovvero $12b + 36 - 16b - 4 = 0$ da cui si ottiene $b = 8$