SOLUZIONI BIENNIO 2008

1. **Un torneo**

B) 5 (Il numero di partite è $10 \cdot 9/2=45$ dove si divide per due in quanto ogni partita è contata due volte. Se v è il numero di partite concluse con la vittoria di una delle due squadre, mentre p è il numero delle partite finite pari, i punti complessivi assegnati sono 3v+2p.

$3v+2p=130$

$v+p=45$

Quindi v=40, p=5

2. **Quattro triangoli in un triangolo**

A)1/16

3. **Il naufrago**

D) Sabato. Poiché non è possibile che oggi sia giovedì e nello stesso tempo ieri sia stato lunedì, allora entrambe le informazioni devono essere errate; siamo in un giorno in cui tutti mentono. Non potendo essere né giovedì, né martedì (giorno dopo il lunedì), resta solo l'ultimo giorno pari.

4. **Cerchi...automobilistici**

B) 2cm

5. **Le carte a doppia faccia**

D) 1ª, 3ª, e 4ª.

Per controllare l'affermazione del mago, bisogna assicurarsi che, ogni volta che una carta è rossa da un lato, essa rappresenta una figura dall'altro lato. Naturalmente non si dice nulla sul viceversa, e cioè, se compare una figura da una parte, nessuna informazione ha dato il mago sull'altro lato della carta. Valgono le implicazioni:

se c'è una carta rossa in una faccia, allora c'è una figura nell'altra faccia (A⇒B)

se c'è una carta diversa da figura in una faccia, allora c'è una carta nera nell'altra faccia (non B⇒non A)

(quest'ultima proposizione è detta contronominale della prima)

Quindi le carte da controllare (chiamiamole "esigenti" perché esigono che il retro abbia certe caratteristiche) sono le carte rosse e quelle diverse dalle figure. La 2^ carta (fante di fiori) non è esigente (perché non è né rossa, né è una non-figura, dal momento che è proprio una figura). Inoltre essa rispetta le due implicazioni poste, qualunque sia la carta dietro: infatti se anche dietro ci fosse una carta esigente (cioè conforme alle premesse di una delle due implicazioni), essendo verificata ciascuna delle due conseguenze (Figura; Carta Nera), allora ciascuna delle due implicazioni (peraltro equivalenti perché una contronominale dell'altra) sarebbe vera. Quindi il retro della 2^ carta non dà sicuramente problemi. Si può evitare di guardarlo. Invece le altre tre carte sono tutte esigenti: il re di quadri è una carta rossa, il re di cuori è una carta rossa, il 5 di picche è una carta non-figura. Queste tre carte vanno quindi controllate.

RISPOSTA ALTERNATIVA: Dall'implicazione: "Se c'è una carta rossa in una faccia, allora c'è una figura nell'altra faccia" segue che vanno controllati i retro di tutte le carte rosse, ed i retro delle carte nere diverse da figure. Non serve guardare il retro delle carte nere rappresentanti una figura, perché:

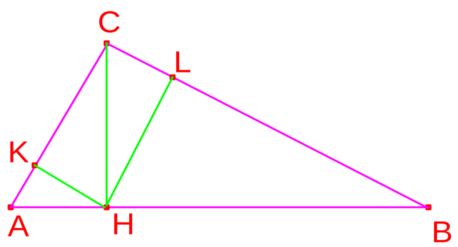
a) se le figure dietro avessero una carta rossa, allora l'implicazione sarebbe vera;
b) se le figure invece dietro avessero una carta nera, allora l'implicazione non interesserebbe applicarla, dal momento che la premessa (carta rossa) non sarebbe vera.

Sia nel caso a) che nel b), noi non potremmo mai dire al mago di aver mentito, in base all'osservazione del retro di una carta nera che rappresenti una figura. Pertanto è necessario voltare solo la carta n° 1 e la n° 3 (perché rosse) e la n° 4 (perché nera ma non-figura).

RISPOSTE CON RICHIESTA DI GIUSTIFICAZIONE

6. **Ancora sul triangolo diviso in quattro triangoli**

$\sqrt{3}/2$



I triangoli AHC, CHB sono simili (sono rettangoli, e gli angoli ACH, CBH sono uguali per essere entrambi complementari dello stesso angolo HCB). Quindi AH:CH=CH:HB (II teorema di Euclide). Poiché il rapporto tra le aree dei due triangoli detti deve essere 3, il rapporto $\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{HB}}$ sarà $\sqrt{3}$. Quindi: $\overline{CH}=\sqrt{3}\overline{AH}$; $\overline{HB}=3\overline{AH}$;

$\overline{CB} = \sqrt{9+3}\,\overline{AH}$; Quindi il rapporto richiesto sarà $\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AH}+\overline{HB}} = \frac{\sqrt{12}}{1+3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7. Congresso Internazionale di Matematica

Dopo aver ordinato come vogliamo i congressisti dal n° 1 al n° 2008, consideriamo la terna dei primi tre. Si sa che essi comunicano, eventualmente tramite uno dei tre che funge da interprete. Allora sicuramente esistono almeno due dei tre che parlano una stessa lingua, ed altri due che parlano una stessa lingua. Posso sicuramente scegliere due di questi tre che possono stare in camera insieme (ho anche più di una possibilità di scelta): siano a, b. L'altro dei tre (sia c) lo possiamo considerare insieme ai successivi due congressisti dell'elenco (il 4° e il 5°). Come per la precedente terna, anche da questa terna possiamo estrarre una coppia di persone che possono comunicare tra loro: andranno in una seconda camera. E così via. Alla fine possono restar non sistemati due congressisti t, z: se parlano una lingua comune, occuperanno l'ultima stanza (la n° 1004), altrimenti bisogna far un cambio di camera, per esempio con la 1^ camera che è stata occupata da a, b. Infatti, per esempio t, z, a: due di questi possono star in camera insieme. Sicuramente a può star in camera con t (oppure con z): se non fosse possibile questo, a sarebbe isolato e la terna t, z, a non potrebbe avere interprete, né potrebbe avvenire comunicazione nella terna, come invece è ipotizzato all'inizio. Allora in una camera saranno (a, t) (o, rispettivamente, (a, z)) ed in un'altra (b, z) (rispettivamente (b, t)). Infatti nel I caso, z non può esser privo di comunicabilità con b - perché già non può comunicare con t - e quindi, se così fosse, z sarebbe isolato all'interno della terna b, z, t, terna che non sarebbe in condizioni di comunicabilità. Quindi un'ultima camera può esser occupata da b e da z. Analogamente nel 2° caso una camera potrà essere occupata da a e z, ed un'altra da b e da t.

SOLUZIONE ALTERNATIVA: Se un congressista x non sa comunicare con un altro y, allora x può comunicare con qualunque altro congressista z; infatti, se così non fosse, esisterebbe un congressista z con cui x non potrebbe comunicare, e quindi, non potendo x comunicare né con y né con z, x sarebbe isolato nella terna (x, y, z), cioè non sarebbe possibile la comunicazione all'interno della terna, come invece è richiesto dall'ipotesi. Di conseguenza, se alla fine restassero due congressisti z, t non comunicanti, allora sicuramente sia z che t potrebbero comunicare con qualunque altro congressista. Quindi si potrebbe fare un cambio di camera a scelta, per esempio z potrebbe andare con il primo sistemato a, mentre sicuramente anche b e t potrebbero comunicare tra loro (perché t potrebbe comunicare con tutti, ad eccezione di z). Possono in tutti i casi essere sistemati, quindi, tutti i congressisti (problemi di antipatia e incompatibilità di carattere a parte, ovviamente)!

8. La piramidina

Siano ABCD i vertici della base, e V il quinto vertice.

La faccia di vertici A, B, V e quella di vertici B, C, V avente in comune con la prima il lato BV, devono avere lo stesso numero di chicchi di riso. Siano a, b, c, d, v, il numero di chicchi in ogni vertice. Allora: a+b+v=b+c+v, quindi, eliminando le variabili comuni (b, v) si ha a=c. Analogamente si dimostra b=d, cioè i vertici alla base, se opposti, hanno lo stesso numero di chicchi. Poichè 5 chicchi vanno sicuramente uno per vertice, restano da sistemare 2 chicchi: o vanno i vertici opposti della base (due possibilità), o tutti e due nel vertice in alto, che arriverà a 3 chicchi. Le possibili soluzioni sono pertanto tre:

```
1     2          2    1        1    1
   1                1             3
2     1          1    2        1    1
```

9. Le paghette congrue

	Marco	Elisa	Francesco	
Paghetta	25.28	33.64	41.08	
Età (mesi)	136	181	221	Totale età 538 mesi
Calcolo paghetta	(100/538)136	(100/538)181	(100/538)221	

10. Lo sapevate che siamo in un anno...cubico-primo?

L'anno prossimo cubico-primo sarà il $2011=1^3 \cdot 2011$; infatti 2011 è il primo numero primo dopo 2008 (2009 è divisibile per esempio per 7, e 2010 per 2).

Viene considerata, con valutazione parziale, anche la risposta $2056=8 \cdot 257$. Infatti 2056 è il cubico primo successivo a 2008, del tipo cubo·numero primo, con cubo diverso dal cubo (banale) 1. Infatti:

$2016=8\ 252=2^3 2^2 3^2 7$ non è cubico primo

$2024=8 \cdot 253=2^3 11\ 23$ non è cubico primo

$2032=8 \cdot 254= 2^3 2\ 127$ non è cubico primo

$2040=8 \cdot 255=2^3 3\ 5\ 17$ non è cubico primo

$2048=8 \cdot 256=2^3 2^8$ non è cubico primo

$2056=8 \cdot 257=2^3 257$, e 257 è primo; quindi 2056 è cubico primo

Altri anni precedenti il 2056, per esser cubici primi, dovrebbero essere del tipo 3^3·primo. Esistono multipli di 27, tra 2008 e 2056, con questa proprietà? Esaminiamo i multipli di 3 in quest'intervallo:

2010 non è multiplo di 27

2013 non è multiplo di 27

2016 è multiplo di 9, ma non di 27. Il successivo multiplo di 9 è 2016+9=2025, che è anche divisibile per 27, ma: $2025=27 \cdot 75=3^4\ 5^2$non è cubico primo.

Proviamo il prossimo multiplo di 27: $2025+27=2052=3^3 2^2 19$ non è cubico primo

Il successivo multiplo di 27 è 2052+27 supera 2056

Proviamo a vedere se troviamo multipli di $4^3=64$. Poiché 2008/64=31.375, proviamo a trovare i prodotti di 64 per numeri primi oltre 31:

$64 \cdot 31=1984$

$64 \cdot 37=2368$ Siamo già oltre il 2056

Proviamo con $125=5^3$

$5^3 13=1625$

$5^3 17=2125$

Proviamo con $216=6^3$

$6^3 7=1512$

$6^3 11=2376$

Proviamo con $343=7^3$

$7^3 5=1215$

$7^3 7=2401$

Proviamo con

$512=8^3$

$8^3\ 3=1536$

$8^3\ 5==2560$

$9^3 2=1458$

$9^3\ 3=2187$

$10^3 2=2000$

$10^3\ 3=3000$

$11^3 2=2662$

Quindi 2056 è il cubico primo successivo a 2008, del tipo cubo·numero primo, con cubo diverso dal cubo (banale) 1.

Lista dei numeri primi minori di 1000

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	**257**	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941

11. Una costruzione ripetuta

	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4
N° Lati spezz.	1	4	4^2	4^3	4^4
Lungh. spezz.	1	$4/3 \approx 1.3333$	$(4/3)^2 \approx 0.4444$	$(4/3)^3 2.37037$	$(4/3)^4 \approx 3.1605$