PREMIO CITTA' DI TERNI
(quindicesima edizione)

GARA DEL TRIENNIO **Terni, li 4 aprile 2007**

Istruzioni

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché non ti si dice di farlo;
2) La prova consiste di undici quesiti e/o problemi. Le prime sei domande sono del tipo a risposta multipla; ciascuna di esse è seguita da 5 risposte indicate con le lettere A,B,C,D,E: una sola di questa risposte è giusta. Per ciascuna domanda, la lettera corrispondente alla risposta esatta va riportata in questa pagina nella relativa finestrella della griglia sottostante. Ogni risposta giusta di queste prime sei domande vale **5 punti**, ogni risposta errata vale **0 punti**, ogni risposta omessa vale **un punto**. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia di risposta.
3) I quesiti n° 7 e 8 hanno come risposta un numero, **intero o frazionario, razionale o irrazionale** , da indicare in questa pagina nelle caselle apposite (**8 punti** se è data la risposta esatta; **1 punto** se non viene data risposta)
4) Gli ultimi tre problemi invece richiedono l'indicazione dei passaggi necessari per giungere ai risultati, e delle relative giustificazioni. Ciascuno di loro sarà valutato **con un punteggio da 0 a 10**. Ti invitiamo a formulare la soluzione in modo chiaro e conciso, usufruendo dello spazio riservato e consegnando solo i fogli di questo fascicoletto.
5) Quando ti si dà il via, comincia a lavorare. E' ammesso l'uso della calcolatrice tascabile. Hai due ore di tempo. BUON LAVORO!

Nome:________________________ Cognome: ________________________

Indirizzo:________________________ Città: ________________________

Scuola:________________________ Classe e sezione ________________________

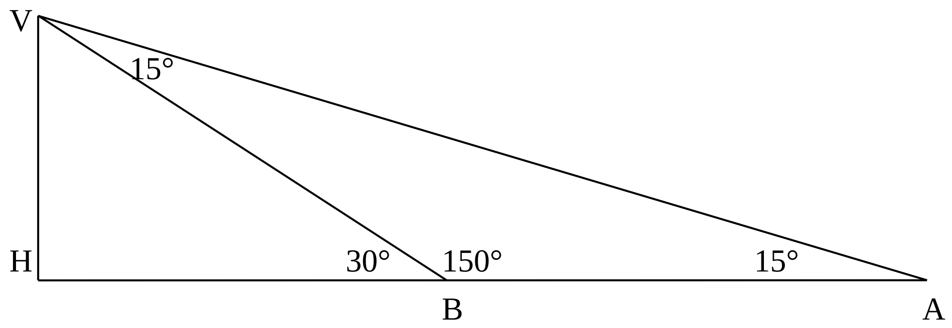
Risposte ai primi dieci quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	D	C	E	A	3	20/3

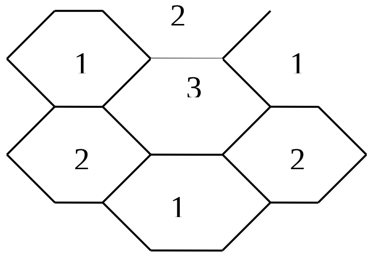
Parte riservata alla commissione

Quesiti 1-6: n° risp. esatte ______x5	
Quesiti 7-8: n° risp. esatte______x8	
N° esercizi senza risposta_____x1	
Valutazione esercizio n. 9 (max 10 punti)	
Valutazione esercizio n. 10 (max 10 punti)	
Valutazione esercizio n. 11 (max 10 punti)	
PUNTEGGIO TOTALE	

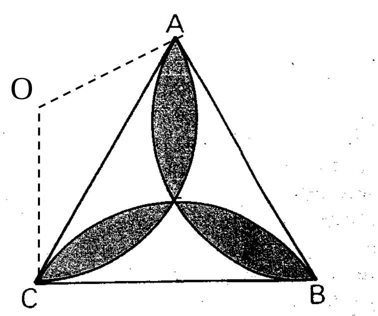
Soluz. n° 1: B



Poiché ABV è isoscele, VB=10m, quindi VH=5m .
Soluz. n° 2: A (3 mattonelle esagonali)
In figura sono indicati con numeri tre possibili colori diversi.



Soluz. n° 3: D).
OA ed OC sono raggi della circonferenza di cui una parte è l'arco AC. OA è perpendicolare ad AB (OA è raggio; AB è tangente), quindi l'angolo tra OA e AC è 30°

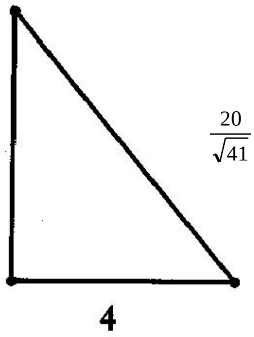


Il settore circolare OAC, di angolo al centro di ampiezza 120°, è la terza parte del cerchio di raggio OA. Ma OA=$\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{AC}{2}=\sqrt{2}$,

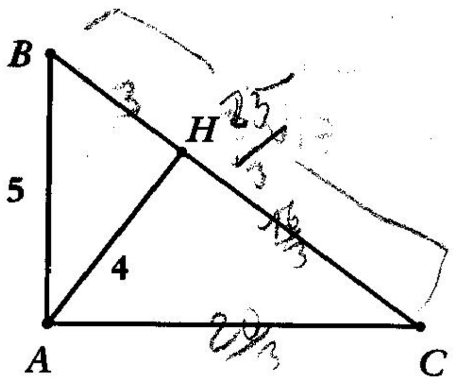
quindi l'area del settore circolare OAC è $\frac{1}{3}\pi 2=\frac{2}{3}\pi$. Se indichiamo con D il baricentro del triangolo equilatero, l'area del settore OAD è $\pi/3$. Tenendo presente che il triangolo OAD è equilatero, l'area di metà "foglia" è $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

che moltiplicata per 6 dà $2\pi-3\sqrt{3}$.

Soluz. n° 4: C). Classifica attuale: ex2°-ex1°-ex4°-ex6°-ex3°-ex5°
Soluz. n° 5: E) 22·4+x≥23·5, quindi x≥27
Soluz. n° 6: La regione nera si può scomporre in 6 triangoli equilateri di lato AB/3, mentre la regione bianca è costituita da 3 dei detti triangoli. Quindi la parte colorata costituisce i 2/3 dell'area del triangolo. Quest'ultima pertanto è $\frac{3}{2}6\sqrt{3}$. Ma l'area del triangolo equilatero è pari a $l^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, (se l è il lato) da cui l=6 cm.
Soluz. n° 7: 3
Tener conto che la diagonale del cubo inscritto è diametro della sfera, che è anche lato del cubo circoscritto. La diagonale del cubo è $l\sqrt{3}$. Quindi il rapporto tra i lati dei due cubi è $\sqrt{3}$. Il rapporto tra superficie di cubi è uguale al quadrato del rapporto tra le dimensioni dei lati, quindi uguale a 3.
Soluz. n°8: La risposta esatta è 20/3.

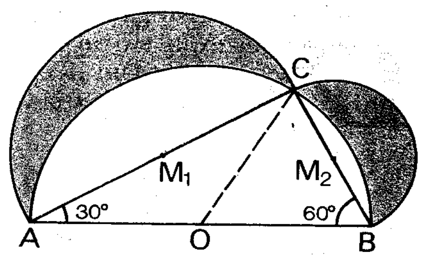


$\frac{20}{\sqrt{41}}$



Le altezze di un triangolo rettangolo sono i due cateti e l'altezza relativa all'ipotenusa, che è sempre minore di ognuno dei cateti, essendo a sua volta cateto di un triangolo rettangolo di cui un cateto del primo triangolo è ipotenusa. Se 4 e 5 sono le misure dei due cateti, l'altezza maggiore del triangolo è 5. Se invece 5 è la misura di un cateto e 4 è l'altezza relativa all'ipotenusa, la misura dell'altro cateto è 20/3, come si determina sfruttando la similitudine dei triangoli ACH e BAH in figura.

DIMOSTRAZIONI



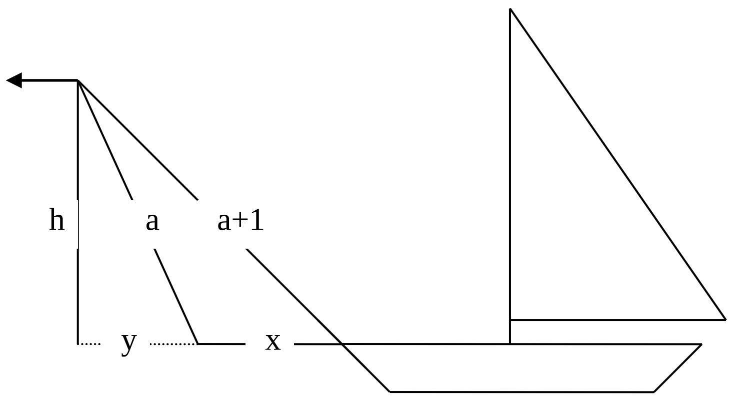
<u>Soluz. n° 9</u>: AC= $r\sqrt{3}$ (**1 punto?)**; mentre BC=r **(1 punto?)**.

La lunula grande ha area $\pi AM_1^{\,2} -$(area settore circolare OAC-area triangolo AOC) (**1 punto?)** = (poiché l'angolo AOC è di 120°, il settore circolare è 3ª parte del cerchio cui fa parte)= $\frac{3}{8}\pi r^2 - \frac{1}{3}\pi r^2 + \frac{1}{2} r \frac{\sqrt{3}}{2} r \;= (\frac{5}{24}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}) r^2$ **(2 punti?)**

Il triangolo OBC è equilatero (ha 3 lati =raggio; oppure:ha due lati che sono uguali perché raggi della stessa circonferenza, quindi due angoli alla base entrambi di ampiezza 60°, quindi anche il 3° angolo avrà stessa ampiezza) Analogamente alla lunula precedente, si determina l'area della lunula di destra: $\frac{1}{8}\pi r^2 - \frac{1}{6}\pi r^2 + \frac{1}{2} r \frac{\sqrt{3}}{2} r$. **(1+2 punti?)**

Area triangolo ABC=$\frac{1}{2} 2r \frac{\sqrt{3}}{2} r = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2$. Constatare che tale area uguaglia la somma delle aree delle due lunule (**2 punti?)**.

<u>Soluz. n° 10</u>:
risposta secca (spostamento più di 1 metro): 0 se senza motivazione alcuna
esempio in un caso particolare: **2 punti**



1^ soluzione .Chiamiamo (fig. 2) h l'altezza del molo rispetto al punto in cui è agganciata la fune, x il tratto di cui si sposta la barca, a+ l la lunghezza iniziale della fune a partire dal bordo del molo (per cui a è la lunghezza del tratto di fune dal molo alla barca, dopo che la fune è stata tirata), y la distanza finale della barca dal molo. Scrivendo le due relazioni pitagoriche $y^2+ h^2 = a^2$ ed $(y+X)^2 + h^2 = (a+l)^2$, e semplificando, si trova $2xy+x^2=2a+ 1$.
Se si osserva con attenzione quest'ultima uguaglianza e si tiene presente che $y < a$, si conclude che non può essere $x <= 1$ (infatti, ne seguirebbe $2xy + x^2<= 2y + 1 < 2a + 1$: l'uguaglianza $2xy+x^2=2a+ 1$quindi non potrebbe verificarsi). Quindi la barca si sposta di più di 1 metro.
Se avessimo indicato con a la lunghezza iniziale della fune (e con a-l quella che prima abbiamo chiamato a), i calcoli sarebbero stati un po' più complicati.
2^ soluzione. Il procedimento visto è un po' laborioso, ma c'è una strada decisamente più rapida. Basta ricordare che ogni lato di un triangolo è minore della somma degli altri due: considerando il triangolo avente i lati di lunghezze a + 1, a ed x, si ha allora
$a+l<a+x$
da cui si conclude subito $x> 1$.
Per chiarire il discorso,è utile pensare alla situazione inversa: se la barca si allontana di un certo tratto dal molo, di quanto varia la lunghezza della fune (sempre a . partire dal bordo del molo)? Se consideriamo il caso limite in cui la barca è inizialmente attaccata al molo e se ne allontana, allora mi pare intuitivo che la lunghezza della fune varia di pochissimo. Invito anzi i lettori a dimostrare che, spingendo la barca verso «il largo» di un tratto d, l'allungamento della fune aumenta (e tende a d) . all'aumentare della distanza iniziale della barca dal molo.

Soluz. n° 11) : la risposta esatta è: sono solo 2 (-1 e +1).
Infatti, posto $z = p/q$, e quindi $l/z = q/p$, con p e q interi diversi da O **(fin qui, 1 punto?)** e primi fra loro
$(p^2 + q^2)/pq$ deve essere un numero intero k. **(fin qui, altri 2 punti?)**
Quindi, p e q devono dividere $p^2 + q^2$ (infatti da $p^2 + q^2=kpq$ consegue $p^2 –kpq=- q^2$, da cui $p(p-kq) =-q^2$, e q^2 è divisibile per p .Ricordando che p e q sono primi fra loro, l'unica possibilità è che $p = 1$ o $p = -1$. **(altri 4 punti?)**
Analogamente si dimostra che $q=l$ o $q=-l$ (infatti l'uguaglianza scritta precedentemente si può scrivere anche nella forma: $p^2 =kpq- q^2$, cioè $p^2=q(kp-q)$, quindi q deve dividere p, e perciò $q=1$ o $q=-1$) **(altri 2 punti?)** quindi si ha $z=l$ oppure $z=-l$ **(un altro punto finale?)**.
Per chi trova soltanto, per tentativi, le soluzioni**: 2 punti per ognuna delle due soluzioni trovate?**