Soluzioni triennio 2008

PREMIO CITTA' DI TERNI

(sedicesima edizione)

GARA DEL TRIENNIO **Terni 23 aprile 2008**

Istruzioni

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché non ti si dice di farlo.
2) La prova consiste di dieci quesiti e/o problemi. Le prime tre domande sono del tipo a risposta multipla; ciascuna di esse è seguita da 5 risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E: una sola di queste risposte è giusta. Per ciascuna domanda, la lettera corrispondente alla risposta esatta va riportata in questa pagina nella relativa finestrella della griglia sottostante. Ogni risposta giusta a queste prime tre domande vale **5 punti**, ogni risposta errata vale **0 punti**, ogni risposta omessa vale **1 punto**. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia di risposta.
3) I quesiti n° 4 e 5 hanno come risposta un numero, da indicare in questa pagina nelle caselle apposite (**8 punti** se è data la risposta esatta; **1 punto** se non viene data risposta)
4) Il quesito n° 6 sarà valutato **1 punto** per ogni sviluppo piano corretto
5) I problemi n° 7, 8, 9 e 10 invece richiedono l'indicazione dei passaggi necessari per giungere ai risultati, e delle relative giustificazioni. Ciascuno di essi sarà valutato **con un punteggio da 0 a 10.** Ti invitiamo a formulare la soluzione in modo chiaro e conciso, usufruendo dello spazio riservato e consegnando solo i fogli di questo fascicoletto.
6) Quando ti si dà il via, comincia a lavorare. E' ammesso l'uso della calcolatrice tascabile. Hai due ore di tempo. BUON LAVORO!

La prova è svolta in forma anonima e consegnata in busta chiusa insieme ad un'altra busta, anch'essa chiusa, contenente le generalità del concorrente.

Risposte ai primi cinque quesiti

1	2	3	4	5
D	B	C	3	1089

Parte riservata alla commissione

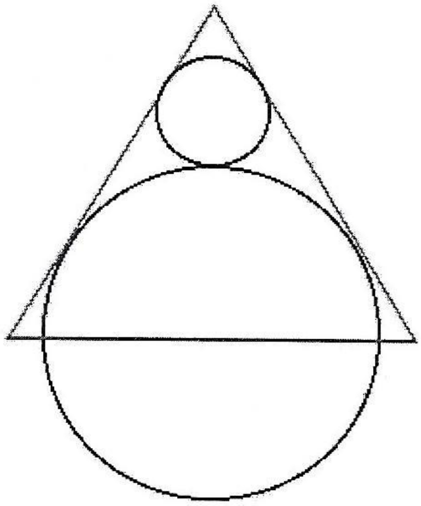
Quesiti 1-3: n° risp. esatte ______x5	
Quesiti 4-5: n° risp. esatte______x8	
N° esercizi senza risposta_____x1	
Valutazione esercizio n. 6	
Valutazione esercizio n. 7 (max 10 punti)	
Valutazione esercizio n. 8 (max 10 punti)	
Valutazione esercizio n. 9 (max 10 punti)	
Valutazione esercizio n. 10 (max 10 punti)	
PUNTEGGIO TOTALE	

1. Quanti pesci ...

Un ittiologo voleva stimare il numero di pesci presenti in uno stagno. Buttò quindi una rete con maglie di misura regolare e dopo aver recuperato la rete vi trovò 30 pesci; contrassegnò ogni pesce con un colore opportuno e li rigettò in acqua. Il giorno seguente, usando la stessa rete, catturò 40 pesci e vide che due di questi erano contrassegnati. Il numero di pesci dello stagno che calcolò approssimativamente è

A) 2400 B) 1200 C) 800 D) 600 E) nessuna delle precedenti risposte

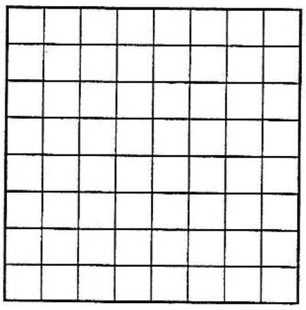
2. L'omino di neve



In figura, il centro della circonferenza più grande è il punto medio del lato di un triangolo equilatero e gli altri due lati del triangolo sono tangenti alla circonferenza stessa. Se la circonferenza più piccola ha come raggio 1 unità, qual è il raggio di quella più grande?

A) $2\sqrt{3}$ B) 3 C) $3\sqrt{2}$ D) $\frac{7}{2}$ E) nessuna delle precedenti risposte

3. La scacchiera

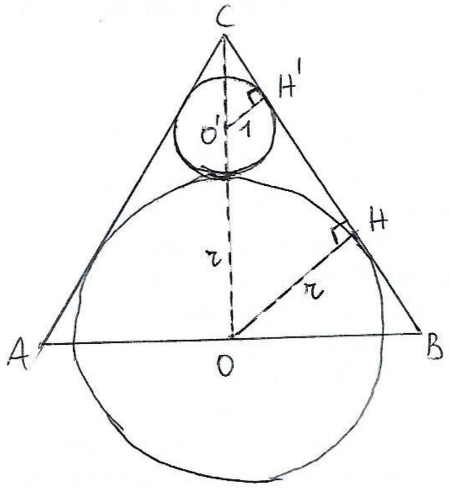


Quanti quadrati ci sono su una scacchiera 8x8? Naturalmente dobbiamo intendere non solo i quadrati unitari, ma anche quelli 2x2, 3x3 e anche tutti quelli più grandi.

A) 128 B) 196 C) 204 D) 300 E) nessuna delle precedenti risposte

1) N = numero dei pesci (stima) $\qquad \dfrac{30}{N} = \dfrac{2}{40} \qquad N = 600$

2)



$\overline{O'H'} = 1 \qquad \overline{OH} = r$

$O\hat{C}B = 30°$ triangolo $30°\,60°\,90°$

$\overline{CO'} = 2 \qquad \overline{CO} = r+3$

$1 : r = 2 : (r+3)$

$2r = r+3 \qquad r = 3$

3) quadrati 8×8 è $1 = 2^0$
quadrati 7×7 sono $4 = 2^2$
quadrati 6×6 sono $9 = 3^2$
quadrati 5×5 sono $16 = 4^2$
quadrati 4×4 sono 5^2
quadrati 3×3 sono 6^2
quadrati 2×2 sono 7^2
quadrati 1×1 sono 8^2

$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204$

4. Escherichia coli

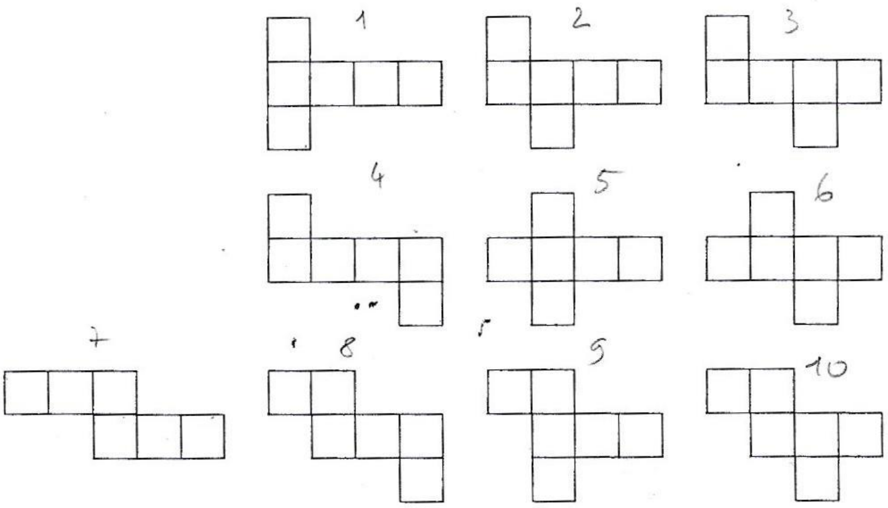
Un abitante usuale dell'intestino umano è il batterio *Escherichia coli.* Una cellula del batterio in brodo di coltura si divide in due ogni 20 minuti. La popolazione di una coltura di *Escherichia coli* è composta inizialmente di 60 cellule.
Dopo quante ore la popolazione conterà 20.000 cellule? 3 ore
(scrivere la risposta nell'apposito spazio in 1ª pagina) *(8 punti)*

5. Il numero capovolto

La moltiplicazione per 9 capovolge un numero di quattro cifre (produce cioè un numero di quattro cifre con le stesse cifre in ordine inverso). Qual è il numero?
(scrivere la risposta nell'apposito spazio in 1ª pagina) 1089 *(8 punti)*

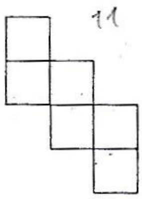
6. Costruzione del cubo

È possibile costruire modelli di poliedri partendo da sviluppi piani disegnati su un cartoncino, ritagliando e ripiegando il cartoncino lungo le linee dello sviluppo. Ad esempio, un tetraedro regolare ha due possibili differenti sviluppi piani.
Trova tutti i possibili sviluppi piani del cubo e disegnali. Sono 11



con 4 facce del cubo allineate sono 6

con tre facce del cubo allineate sono 4



con due facce allineate è 1

4)

60 cellule

$60 \cdot 2$ cellule dopo 20 min

$60 \cdot 2^2$ cellule dopo 40 min

$60 \cdot 2^3$ cellule dopo 60 min

....

$\cancel{60} \cdot 2^n = 20'00\cancel{0}$

$2^n = 333,\bar{3}$

$2^8 = 256$

$2^9 = 512$

dopo 2 h 40 min $\longrightarrow$ 15.360 cellule

dopo 3 h $\longrightarrow$ 30.720 cellule

$n = 9$ 3 ore

nel continuo $n = \frac{\log 333,\bar{3}}{\log 2} \approx \frac{2,5228787}{0,30103} = 8,3808....$

$\downarrow$

2,7936 h (2 h 48 min)

(2,80 h)

5) **Il numero capovolto**

soluzione:

$abcd \cdot 9 = dcba$

$(10^3 \cdot a + 10^2 \cdot b + 10 \cdot c + d) \cdot 9 = 10^3 \cdot d + 10^2 \cdot c + 10 \cdot b + a$

Se la cifra a ≥ 2 la moltiplicazione per 9 aumenterebbe il numero delle cifre del numero, pertanto la cifra a=1

$(10^3 \cdot 1 + 10^2 \cdot b + 10 \cdot c + d) \cdot 9 = 10^3 \cdot d + 10^2 \cdot c + 10 \cdot b + 1$

$10^3 \cdot 9 + 10^2 \cdot b \cdot 9 + 10 \cdot c \cdot 9 + d \cdot 9 = 10^3 \cdot d + 10^2 \cdot c + 10 \cdot b + 1$

Da cui si ricava d=9

$10^2 \cdot b \cdot 9 + 10 \cdot c \cdot 9 + 9 \cdot 9 = +10^2 \cdot c + 10 \cdot b + 1$

$10^2 \cdot b \cdot 9 + 10 \cdot c \cdot 9 + 9 \cdot 9 - 10^2 \cdot c - 10 \cdot b - 1 = 0$

$10^2 (9 \cdot b - c) + 10 \cdot (9 \cdot c - b) + 80 = 0$

$10 \cdot (9 \cdot b - c) + 9 \cdot c - b + 8 = 0$

$89 \cdot b - c + 8 = 0$

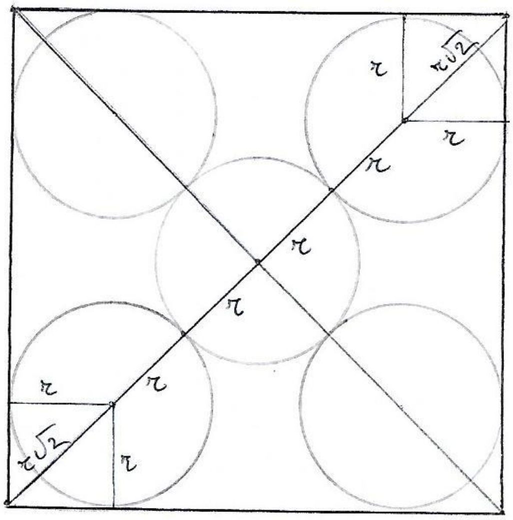
$89 \cdot b + 8 = c$

Da cui b=0 e c=8 e il numero cercato è 1089

7. Fior di circonferenze

Internamente ad un quadrato di lato unitario vi sono cinque circonferenze con lo stesso raggio che non si sovrappongono. Una circonferenza ha il centro coincidente con il centro del quadrato ed è tangente alle altre quattro circonferenze, ciascuna delle quali è tangente a due lati del quadrato (è situata in angolo). Determina il raggio delle circonferenze.

(Giustificare la risposta) *(max 10 punti)*



lato = 1

diagonale = $\sqrt{2}$

$$r + r + r + r + 2 \cdot r\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$4r + 2r\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$r(4 + 2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$$

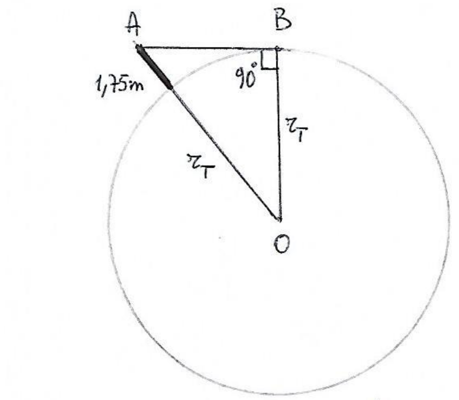
$$r = \frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \cdot \frac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-4}{16-8} = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{8}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$r \cong 0{,}207$$

8. In una bella giornata ...

In una bella giornata limpida, Marco, che si trova in riva al mare, vede la linea dell'orizzonte. Si chiede se c'è un modo per calcolare quanto dista da sé la linea dell'orizzonte. Supponendo che gli occhi di Marco si trovano a 1,75 m dal livello del mare e sapendo che il raggio terrestre è 6370 km, prova a trovare a che distanza arriva lo sguardo di Marco.
A quale altezza si dovrebbe trovare Marco, sempre in piedi, per vedere fino a 10 km di distanza?
(Giustificare la risposta) *(max 10 punti)*



$r_T = 6370\ Km = 6{,}370\cdot 10^6\ m$

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2} =$$

$$= \sqrt{(6{,}370\cdot 10^6 + 1{,}75)^2 - 6{,}370\cdot 10^6}\ m =$$

$$= \sqrt{\cancel{(6{,}370\cdot 10^6)^2} + (1{,}75)^2 + 22{,}295\cdot 10^6 - \cancel{(6{,}370\cdot 10^6)^2}}\ m$$

$$\cong \sqrt{22{,}295}\cdot 10^3\ m \cong 4{,}72\cdot 10^3\ m = 4{,}72\ Km$$

$$\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2$$

$$(r_T + h)^2 - r_T^2 = 10^2 \quad \text{in } Km$$

$$(r_T + h)^2 = 100 + r_T^2$$

$$r_T + h = \sqrt{100 + r_T^2} \qquad h = \sqrt{100 + r_T^2} - r_T$$

$$h = \sqrt{100 + 6370^2} - 6370 = (6370{,}00785 - 6370)\ Km$$

$$h = 0{,}00785\ Km \qquad h = 7{,}85\ m$$

$$h' = 7{,}85 - 1{,}75 = 6{,}10\ \text{metri}$$

9. Tutti in fila

Ci sono dodici numeri interi in fila. Il quarto numero è 7 e il dodicesimo è 21. La somma di tre numeri successivi è sempre 224. Trova i dodici numeri.
(Giustificare la risposta) *(max 10 punti)*

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9 \quad x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12}$

$x_4 = 7 \quad x_5 = x \quad x_6 = 217 - x \quad x_{12} = 21$

$\cancel{x_1} + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = x_3 + x_4 + x_5 = x_4 + x_5 + x_6 = x_5 + x_6 + x_7 = \ldots$

$x_1 = x_4 = x_7 = x_{10} = 7$

$x_2 = x_5 = x_8 = x_{11}$

$x_3 = x_6 = x_9 = x_{12} = 21$

$x_1 = 7 \quad x_2 = ? \quad x_3 = 21$

$x_1 + x_2 + x_3 = 224$

$x_2 = 224 - 7 - 21$

$x_2 = 196$

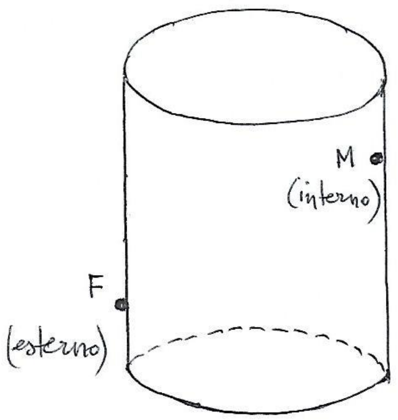
7 196 21 7 196 21 7 196 21 7 196 21

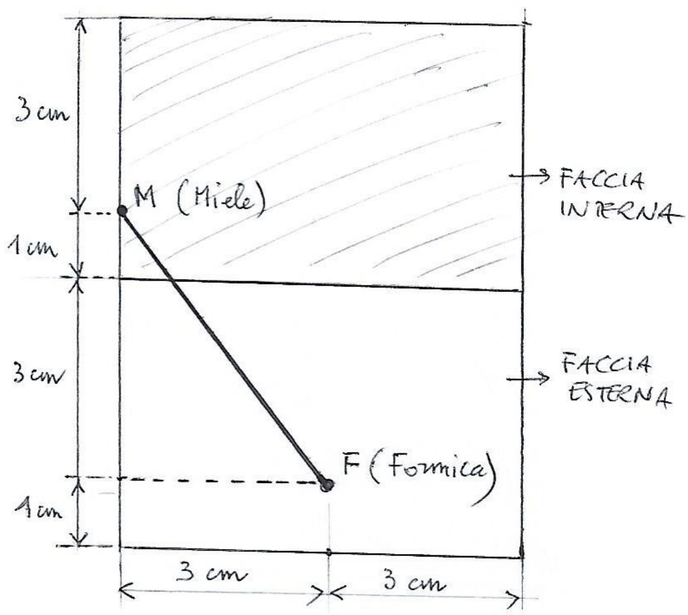
$224 - x - 7 = 217 - x$

10. La via più breve

Una formica si trova all'esterno di un bicchiere cilindrico alto 4 cm e di 6 cm di circonferenza. All'interno del bicchiere, ad una distanza di 1 cm dalla cima, è posta una goccia di miele. La nostra formica si trova dalla parte opposta del bicchiere rispetto al miele, ad una altezza di 1 cm dal fondo. Quanto è lunga la strada più breve che la formica deve percorrere per raggiungere il miele?
(suggerimento: si sviluppi sul piano la superficie laterale del bicchiere)
(Giustificare la risposta) *(max 10 punti)*

Circ. = 6 cm h = 4 cm





$$\overline{FM} = \sqrt{3^2 + 4^2}\ cm = \sqrt{25}\ cm = 5\ cm$$

oppure