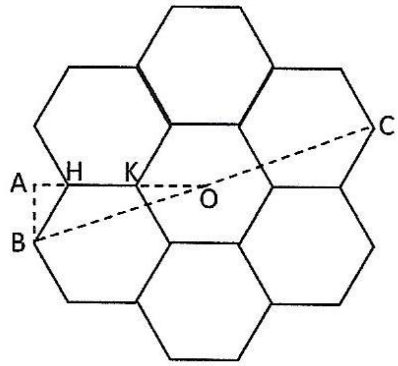
Soluzioni triennio ~~2009~~ 2010

1. La casa delle api

La risposta esatta è C)

La distanza richiesta è la lunghezza $BC = 2BO$;



$$AH = 1; \quad HK = 2; \quad KO = 2; \quad AO = AH + HK + KO = 5$$

$$AB = \sqrt{BH^2 - AH^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$BO = \sqrt{AO^2 + AB^2} = \sqrt{5^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{25+3} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$BC = 2BO = 4\sqrt{7}$$

2. La girandola

La risposta esatta è B)

Essendo la somma degli angoli interni di un triangolo pari ad un angolo piatto, la somma degli angoli evidenziati (indicati ciascuno con i) sarà:

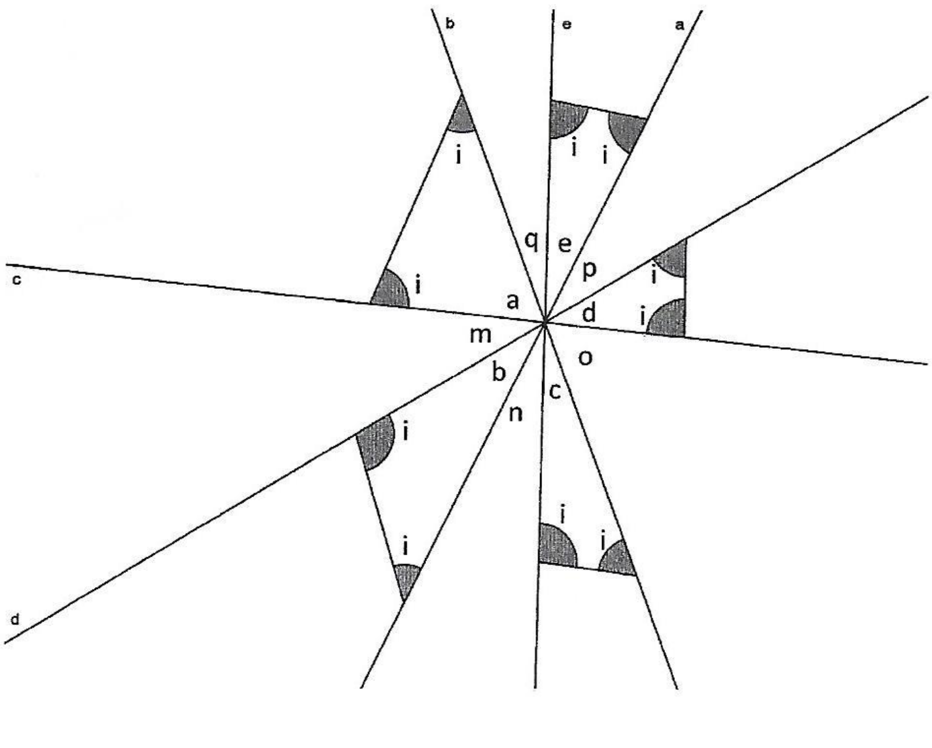
S_i = 5 angoli piatti meno la somma degli angoli (a+b+c+d+e);

essendo a = o; b = p; c = q; d = m; e = n perché tutte coppie di angoli opposti al vertice si avrà:

a+b+c+d+e+m+n+o+p+q = 2 angoli piatti

a+b+c+d+e = 1 angolo piatto

Si=5 angoli piatti – 1 angolo piatto = 4 angoli piatti = 720°



3. La catena di triangoli rettangoli

Il primo triangolo rettangolo ha i cateti c e kc e l'ipotenusa $c\sqrt{1+k^2}$;

il secondo triangolo ha i cateti $c\sqrt{1+k^2}$ e $kc \cdot c\sqrt{1+k^2}$ e l'ipotenusa $c\sqrt{(1+k^2)^2}$;

supposto di aver disegnato n triangoli, l'ennesimo avrà l'ipotenusa $c\sqrt{(1+k^2)^n}$

e dovendo essere 4 il rapporto tra questa e la prima si avrà:

$$\frac{c\sqrt{(1+k^2)^n}}{c\sqrt{(1+k^2)}} = 4 \Rightarrow \sqrt{(1+k^2)^{n-1}} = 4 \Rightarrow (1+k^2)^{n-1} = 16;$$

essendo $16 = 2^4$ oppure 4^2 si avrà:

$(1+k^2)^{n-1} = 4^2$ da cui $1+k^2 = 4$ e $n-1=2$ ma non può essere $1+k^2 = 4$ perché k è intero per cui potrà essere solo :

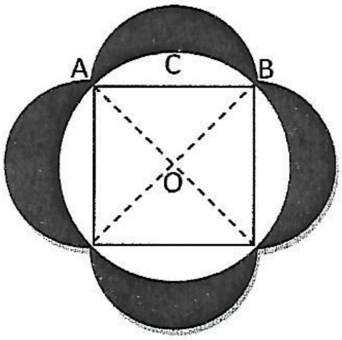
$(1+k^2)^{n-1} = 2^4$ da cui $1+k^2 = 2 \Rightarrow k=1$ e $n\text{-}1 = 4 \Rightarrow n = 5$

E pertanto i triangoli disegnati sono **5**.

4. L'area delle lunule

Il lato del quadrato misura √2 ed è il diametro di ciascuna delle semicirconferenze per cui l'area di ciascuna semicirconferenza vale $\pi/4$

L'area del settore circolare AOB misura 1/4 dell'area del cerchio e vale perciò $\pi/4$



L'area del triangolo AOB vale 1/2

L'area della parte delimitata dall'arco ACB e dal lato AB vale $\pi/4 - 1/2$

Pertanto l'area di ciascuna lunula vale $\pi/4 - (\pi/4 - 1/2) = 1/2$

E l'area delle quattro lunule vale **2**

8. Il furbo e l'avaro

Soluzione:

Ovviamente ci guadagna il mendicante perché :

la somma pagata dal mendicante è la somma dei primi 30 termini di una progressione aritmetica di ragione 1, pertanto

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}; \text{ diventa } S_{30} = \frac{1+30}{2} \cdot 30 = 465$$

La somma pagata dall'avaro è la somma dei primi 30 termini di una progressione geometrica di ragione 2, pertanto

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}; \qquad \text{diventa} \quad S_{30} = \frac{1}{100000} \cdot \frac{2^{30} - 1}{2-1} \cong 10737.50$$

9. Problema di Eulero

Soluzione: se la quota di ciascun figlio è $\boldsymbol{x}$ e l'intera fortuna è $\boldsymbol{y}$, le quote di ciascun figlio sono

1°: $x = 100 + \dfrac{y-100}{10}$

2°: $x = 200 + \dfrac{y-x-200}{10}$

3°: $x = 300 + \dfrac{y-2x-300}{10}$ e così via.

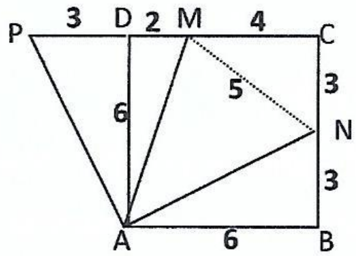
Facendo la differenza fra due termini consecutivi si ottiene

$$300 + \frac{y-2x-300}{10} - \left(200 + \frac{y-x-200}{10}\right) = 100 - \frac{x+100}{10} = 0$$

Da cui $x = 900$ e quindi $y = 8100$ e il numero dei figli è 9.

5. Caccia all'angolo

Soluzione:



i triangoli rettangoli PDA e BAN sono uguali perché hanno i cateti uguali da cui si deduce:

1) angolo(PAD) = angolo(BAN)

2) PA = AN;

i triangoli PAM e NAM sono uguali perché PA=AN; PM=MN=5 e AM in comune da cui si deduce

3) angolo(PAM) = angolo(NAM)

angolo(BAN) + angolo(NAD)=90° e per la 1) si ha anche

angolo(PAD) + angolo(NAD)=90°

quindi angolo(PAN)=90° e per la 3) si ha angolo(PAM)=angolo(NAM)= **45°**

6. La somma nascosta

Soluzione:

sommando membro a membro le due uguaglianze A+B = C e C + D = EA si ha A+B+C+D = C+EA eliminando C si ha A+B+D = EA da cui si ricava B+D = EA – A = 10xE+A – A = 10xE poiché la cifra E non può che essere 1 si ottiene

B+D = 10

7. Trova l'errore

Soluzione:

l'errore è al 6° passaggio e cioè da

$(a-c)^2=(b-c)^2$ non si può dedurre $a-c=b-c$ perché dall'uguaglianza di due quadrati non si può dedurre l'uguaglianza delle basi.

10. Regali di Natale

Soluzione:

ogni moglie compra x regali per x centesimi ciascuno, ed ogni marito y regali per y centesimi ciascuno;

il problema richiede $x^2 - y^2 = 75$

$75 = 5 \times 5 \times 3$ quindi si hanno sei divisori: $1; 75; 3; 25; 5; 15$ e pertanto

$$x^2 - y^2 = 75$$
$$\Downarrow$$
$$(x-y)(x+y) = 75$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 75 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 15 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x = 38 \\ y = 37 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 14 \\ y = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}$$

Pertanto si può scrivere la seguente tabella:

moglie	marito
38 Anna	37
14	11 Gigli
10 Elisabetta	5

Quindi il cognome di Maria non può che essere Gigli.