**Soluzioni triennio 2014**

## 1. Il valore nascosto

La risposta esatta è: C

Infatti dal prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ otteniamo:
$100^2 - 99^2 = (100-99)(100+99) = 100 + 99$ e così per tutte le coppie risultando infine una progressione aritmetica di ragione 1 la cui somma è 100+99+98+…….+2 +1=5050
oppure, essendo
$100^2 - 99^2 = 1 \cdot 199 = 199$
$98^2 - 97^2 = 1 \cdot 195 = 195$
$96^2 - 95^2 = 1 \cdot 191 = 191$
…………………
$4^2 - 3^2 = 1 \cdot 7 = 7$
$2^2 - 1^2 = 1 \cdot 3 = 3$ risulta una progressione aritmetica di ragione 4 la cui somma è
$n(a_1+a_n)/2 = 50\ (3+199)/2 = 5050$

## 2. Le tre categorie

La risposta esatta è: D

Infatti la ragazza è un paggio, non può essere un cavaliere (altrimenti la sua prima affermazione dovrebbe essere vera), e neppure un furfante (altrimenti la sua prima affermazione dovrebbe essere falsa). Quindi la prima affermazione della ragazza è falsa e la seconda deve essere vera, cioè il vecchio è un paggio. La prima affermazione del vecchio è quindi vera e la seconda deve essere falsa; quindi il ragazzo non è un cavaliere. Egli non può essere un furfante, altrimenti anche la sua seconda affermazione dovrebbe essere falsa, mentre si è visto che tale affermazione è vera. Quindi anche il ragazzo è un paggio.

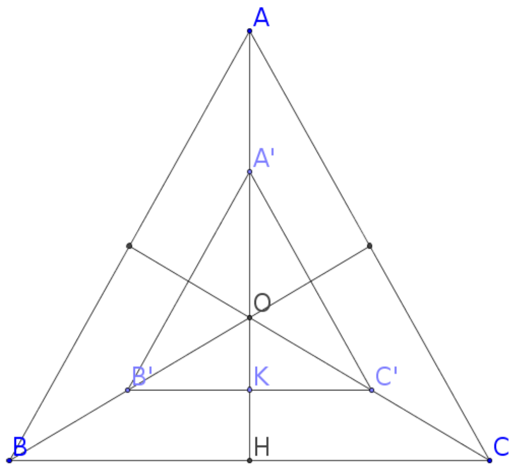
## 3. Il torneo di tennis

La risposta esatta è: C

Indicando con a, b, c, d, e, le età dei cinque giocatori si ha:
$a + b + c + d = 124$
$a + b + c + e = 128$
$a + b + d + e = 130$
$a + c + d + e = 136$
$b + c + d + e = 142$ e pertanto
$4a + 4b + 4c + 4d + 4e = 124 + 128 + 130 + 136 + 142.$
Dunque la somma delle età dei 5 giocatori è 660/4 = 165. Poiché la somma delle età dei 4 giocatori più anziani è 142, il giocatore più giovane ha 23 anni (differenza tra 165 e 142).

### 4. I due triangoli

La risposta esatta è: $\frac{1}{4}$ oppure $\frac{9}{4}$




HK = $\frac{1}{6}h$ e sia KO = $x$ allora, poiché in un qualsiasi triangolo le mediane si dividono in parti tali che quella che contiene il vertice è doppia dell'altra, si ha:

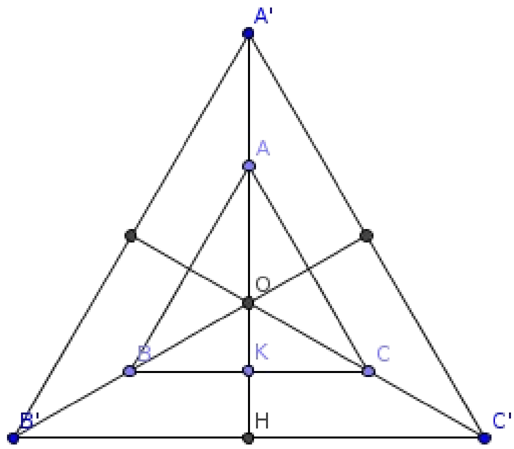
$$\frac{1}{6}h + x = \frac{1}{3}h \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{6}h$$

Pertanto l'altezza del triangolo A'B'C' è

$$\frac{1}{6}h + 2 \cdot \frac{1}{6}h = \frac{1}{2}h$$

e allora il rapporto tra l'area di A'B'C' e l'area di ABC è $\frac{1}{4}$

oppure




HK = $\frac{1}{6}h$ HO = $\frac{1}{6}h + \frac{1}{3}h = \frac{1}{2}h$

Pertanto l'altezza del triangolo A'B'C' è

$$\frac{1}{2}h + 2 \cdot \frac{1}{2}h = \frac{3}{2}h$$

e allora il rapporto tra l'area di A'B'C' e l'area di ABC è $\frac{9}{4}$

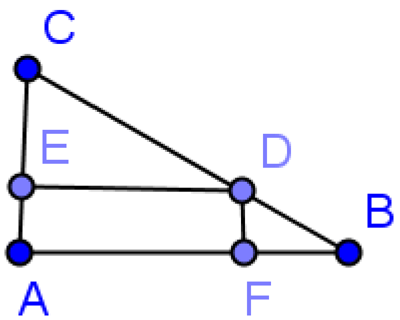
### 5. Il sistema

La risposta esatta è: 69

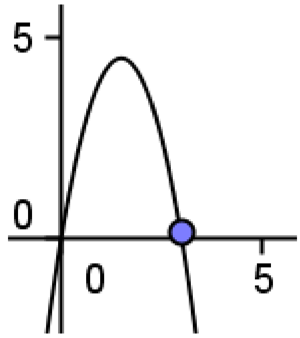
Infatti $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 81 - 12 = 69$ ; dalla seconda equazione raccogliendo xy tra i primi due termini si ha $xy(x+y) + (x+y) = 6(x+y) + (x+y)$ quindi $7(x+y) = 63$ ovvero $(x+y) = 9$.

## 6. Un’opera sul marciapiede

La risposta esatta è: 4,5 m$^2$




Tra tutti i rettangoli AFDE con un vertice in A, dobbiamo determinare quello di area il più grande possibile. Il triangolo rettangolo di partenza ABC ha un cateto doppio dell’altro; ed i triangoli rettangoli CED e DFB sono ad esso simili per avere i tre angoli congruenti (sono uguali gli angoli CDE = DBF perché corrispondenti, ed analogamente per ECD e FDB). Sia x = AE, allora EC = 3-x, quindi ED=2(3-x) (il rapporto tra i cateti è 2). L’area di AFDE è pari allora a: $2(3-x)x=6x-2x^2$.

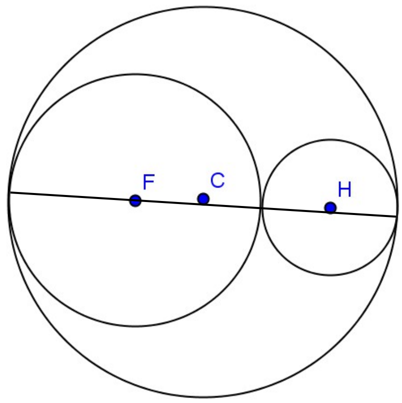



Il grafico della funzione $y = 6x-2x^2$, per x variabile tra 0 e 3, ha la concavità verso il basso ed il valore più grande si ha in corrispondenza del vertice V(3/2; 9/2 ). Quindi l’area è massima (pari all’ordinata del vertice, 9/2) in corrispondenza di AE = x = 3/2, e quindi di AF = 3, e perciò quando E ed F sono i punti medi dei segmenti in cui possono variare.

## 7. Biancaneve e la torta

La risposta esatta è: 180 g

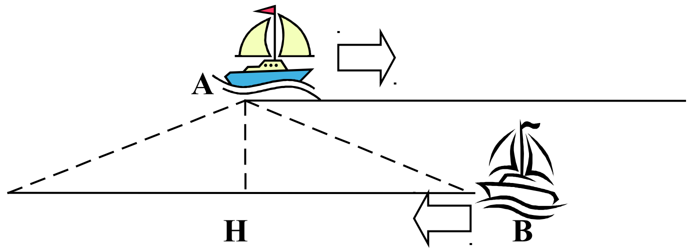
La fetta di Biancaneve è un quarto di quella del Principe, perciò il raggio della porzione più piccola è la metà del raggio di quella più grande. Il raggio della torta è tre volte il raggio della porzione più piccola, e il rapporto tra le aree è $3^2$ , quindi la massa della torta è 9 volte quella della porzione circolare minore, perciò uguale a $9 \cdot 315 = 2835$ g.
Ai nani va 2835-(1260+315) = 1260 grammi, che divisi per 7 fa 180 g.



## 8. Le barche

La risposta esatta è: 12 km/h

Il disegno rappresenta l'istante iniziale del periodo in cui le due barche si vedono (simmetricamente, quando la barca B raggiungerà l'altro estremo della base sarà l'istante in cui le due imbarcazioni cesseranno di vedersi).




AH=3 km. La visibilità è 5 km, quindi, affinché le barche A e B si possano vedere, deve essere la distanza tra le barche AB (ipotenusa) $\leq 5$, quindi HB $\leq \sqrt{5^2 - 3^2}$ km = 4 km.
Il tratto percorso da ciascuna barca (per esempio B) è pari alla base del triangolo sopra visto, di lunghezza 4 km $\cdot 2$ = 8 km. Il moto della barca B rispetto ad A è un moto relativo, in cui le velocità dei due mezzi si sommano in valore assoluto. Se indichiamo la velocità dell'imbarcazione B con $x$ hm/h, la velocità di B relativa ad A, è 8 km/h + $x$ km/h. Tenendo conto che 24 minuti = $\frac{2}{5}$ ora, si ottiene l'equazione:

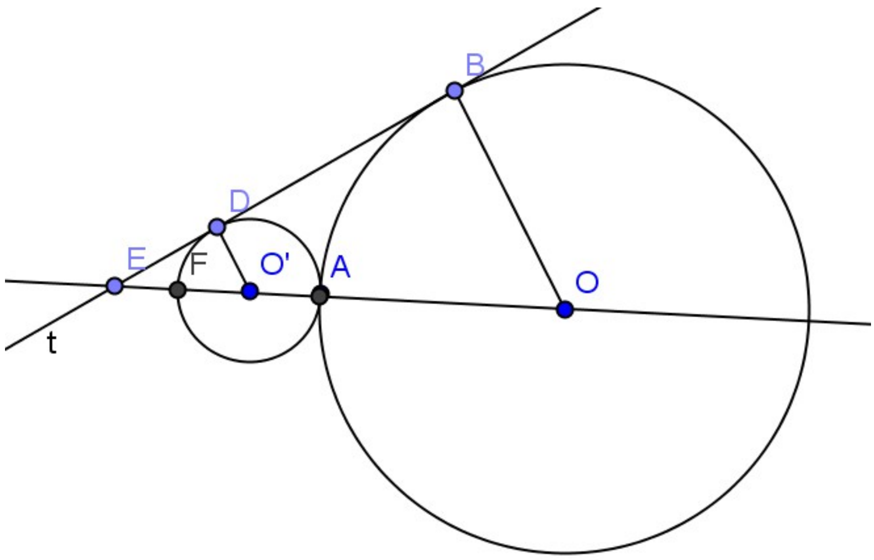
$(x + 8)\ \frac{2}{5}$ h = 8 km

che, risolta, dà $x$ = 12 km/h.

## 9. Le due circonferenze

La risposta esatta è:

I triangoli EDO' EBO sono simili di rapporto 3. Posto FO' = r, ed EF = x, si ha la proporzione:
EO' : EO = DO' : BO.
Quindi: (x+r) : (x+5r) = r : 3r
Cioè
3(x+r)=(x+5r)
Svolti i calcoli: 2x = 2r
x = r.
Allora EO' = 2r = 2DO', quindi il triangolo EO'D è metà di un triangolo equilatero, e l'angolo O'ED è di 30°. Quindi AOB è di 60°. Essendo AO = BO (raggi), gli angoli alla base del triangolo isoscele AOB , sono uguali; si conclude che il triangolo AOB ha gli angoli interni uguali ed è quindi equilatero.



**10. Il pavimento**

La risposta esatta è: 324

Indicando con a il numero di piastrelle grandi per ogni lato del pavimento risulta $n = a^2$, indicando con b il numero di piastrelle piccole per ogni lato risulta $n' = b^2$ . La differenza tra $n'$ e $n$ è data quindi da $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 76$ . Scomponendo in fattori il numero 76 si ottiene $76 = 2^2 \cdot 19$.
Il numero 76 si può quindi ottenere come prodotto di $4 \cdot 19$ , $2 \cdot 38$ oppure $1 \cdot 76$. Dovendo ottenere come risultato un intero sarà $b - a = 2$ e $b + a = 38$ da cui $a = 18$ e $b = 20$ per cui la risposta è $n = 324$.