Soluzioni Triennio 2015

1. Cerchiamo una base

La risposta è b = 5

Il numero XYZ – YXZ può essere scritto

$$b^2X + bY + Z - b^2Y - bX - Z = b(b-1)(X-Y)$$

se deve essere divisibile per 20 (espresso in forma decimale) per ogni X , Y deve risultare

$$b(b-1) = k20$$

una base possibile tra quelle che verificano la condizione è **b = 5**

2. Arriverà in orario?

Se indichiamo con v la velocità (in km/h) del treno, il tempo (in h) sarà $t = 20/v$. Il giorno in cui viene fermato per 3 minuti (1/20 di ora) si avrà

$$\frac{10}{v}+\frac{1}{20}+\frac{10}{(v+10)}=\frac{20}{v}$$

segue con semplici calcoli $v^2 + 10v - 2000 = 0$

la soluzione accettabile è v = 40 km/h quindi

$$\frac{1}{12}+\frac{10}{(40+x)}=\frac{10}{40}$$

da cui si ricava x = 20. Se il treno deve arrivare in orario il macchinista **deve aumentare la velocità di 20 km/h**

3. Una somma impossibile

$a + b + c = 0$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$(a + b + c)^2 = 0$ sviluppando si ottiene

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 0$$

ovvero $1 + 2(ab + ac + bc) = 0$

e quindi $ab + bc + ac = -½$

$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 1$ sviluppando si ottiene

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 1$$

ovvero $a^4 + b^4 + c^4 = 1 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$

ma $(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = (ab + ac + bc)^2 - 2(a^2bc + ab^2c + abc^2)$

$(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 1/4 - 2abc(a + b + c) = 1/4$

quindi $a^4 + b^4 + c^4 = 1 - 1/2 =$ **1/2**

La risposta è ½

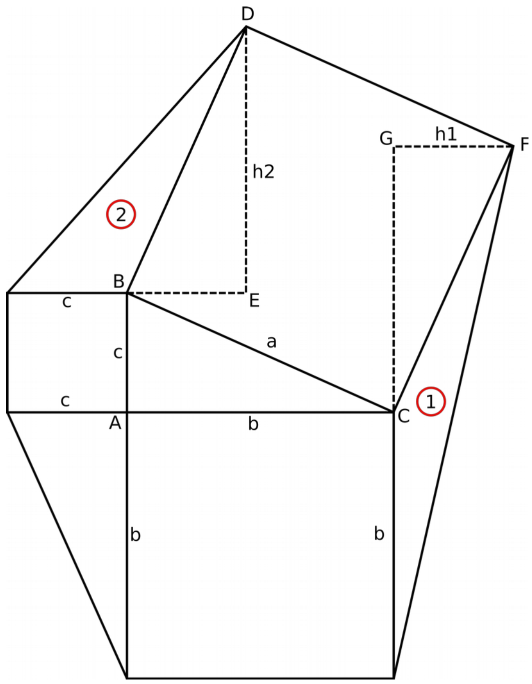
4. I tre cugini

Il numero di giorni in un mese può essere 28, 29, 30, 31. Essendo 29 e 31 numeri primi non possono esprimersi come prodotto di tre numeri diversi. Scomponendo in fattori 28 e 30 con tre numeri differenti otteniamo $28 = 1 \cdot 4 \cdot 7$ e $28 = 1 \cdot 2 \cdot 14$;

$30 = 1 \cdot 5 \cdot 6$, $30 = 1 \cdot 3 \cdot 10$, $30 = 1 \cdot 2 \cdot 15$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Dato che il minore ha almeno due anni (soffia sulle candeline) è **2, 3 e 5 la soluzione del problema**

5. Quanto è grande questo giardino?



Dato il triangolo rettangolo di cateti AB = c, AC = b e ipotenusa BC = a; l'area del giardino è data dalla somma delle aree dei tre quadrati costruiti sui lati, dei due triangoli rettangoli ABC in figura, e dei triangoli ottusangoli n° 1 e n° 2 in figura. Per determinare l'area del triangolo n°1 dobbiamo calcolare l'altezza relativa alla base b, costruiamo il triangolo CFG esso è congruente ad ABC perché l'angolo G=A=90°, l'angolo FCG =ACB perché complementari dello stesso angolo BCG e FC = BC perché lati del quadrato. Risulta quindi FG = AB = c. Allo stesso modo si procederà per il triangolo BED per cui sarà DE = AC = b.

La somma delle aree sarà :

Area totale = $a^2+b^2+c^2+4(1/2)bc = a^2+b^2+c^2+2bc$

6. Pirati e corsari

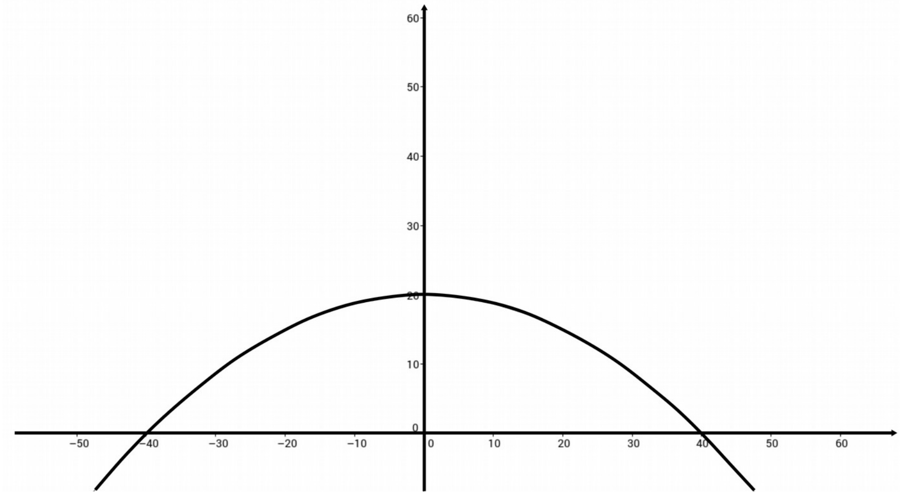
Supponiamo che Enrico porti una bandana nera. Allora Davide mente e dunque porta una bandana nera, ma allora ci sono due bandane nere (D ed E) e quindi Aldo mente e quindi porta una bandana nera. Se Carlo dice la verità allora porterà una bandana rossa e dunque Bruno vede una bandana rossa quindi (B) mente e porta una bandana nera in contraddizione con l'affermazione di C.

Se invece C dice il falso allora porta una bandana nera, pertanto A C D E portano bandane nere in concordanza con l'affermazione di B, ma ciò rende corretta l'affermazione di C, che invece mente. Pertanto E deve portare una bandana rossa. Ciò implica che B mente e dunque porta una bandana nera. Ma allora anche D mente e quindi porta una bandana nera mentre C dice la verità e quindi porta una bandana rossa. In conclusione si ha A nero, B nero, C rosso, D nero ed E rosso.

I pirati sono Aldo Bruno e Davide, i corsari sono Carlo ed Enrico.

7. Il ponte romano

La figura rappresenta la situazione



Determiniamo l'equazione della parabola con vertice sull'asse y quindi è del tipo

$$\mathbf{y = ax^2 + b}$$

Sappiamo che b = 20 , per determinare a imponiamo il passaggio per il punto (40;0) si ottiene a = - 1/80 e quindi l'equazione

$$\mathbf{y = -(1/80)x^2 + 20}$$

Per risolvere il problema basta determinare **f(30) = 8,75.**
Pertanto la barca riuscirà a transitare senza danni

8. Un vassoio di mele

Sia *N* il numero delle mele e 100 il peso complessivo. Dopo aver preso tre mele ne restano *N* - 3 di peso 62. Le tre mele più piccole pesano (38/100)62 e nel vassoi restano *N* - 6 mele di peso (62/100)62. In media per il peso di ciascuna mela deve valere la seguente diseguaglianza

$$\frac{38}{100}62\times\left(\frac{1}{3}\right)\leqslant\frac{62\times62}{100\times(N-6)}\leqslant\frac{38}{3}$$

risolvendo la doppia disequazione rispetto ad *N*

$$3\frac{62\times62}{100\times38}\leqslant N-6\leqslant\frac{62\times3}{38}$$

ovvero

$$3<\frac{2883}{950}\leqslant N-6\leqslant\frac{93}{19}<5$$

quindi

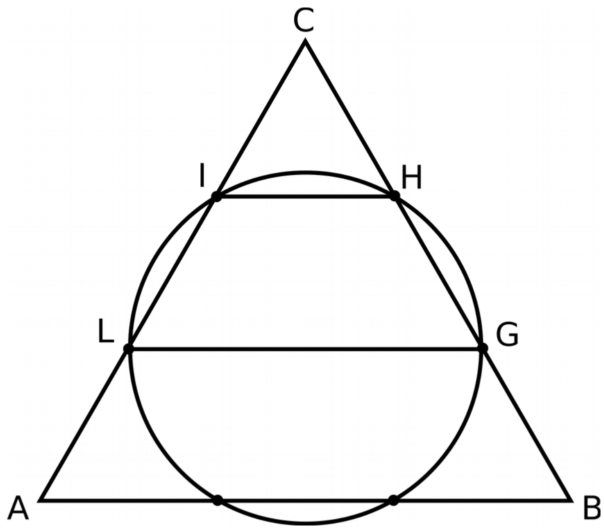
$$3<N-6<5$$

N - 6 = 4 e ***N* = 10**

9. Ma ke numero!

Si osservi che 3^3 =27 la cifra delle unità è 7 quando compaiono due 3
$((3)^3)^3 = 19683$ la cifra delle unità è 3 quando compaiono tre 3
procedendo si noterà che la cifra delle unità può essere solo 3 o 7 ed in particolare quando si ha un numero pari di 3 sarà 7 e poiché il numero di 3 è cento (pari) allora **la risposta è 7**

10. Il triangolo diviso



Per il teorema di Talete IH ed LG sono paralleli ad AB quindi IHGL è un trapezio isoscele essendo inscritto in una circonferenza per cui AC = 3IL = BC = 3HG quindi AC = BC. In modo analogo si ottiene AB = BC da cui la tesi.
Il triangolo ABC è equilatero