ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile di proprietà dell'Associazione Mathesis di Verona, per le Scienze Matematiche pure e applicate – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Sisto Baldo, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Bruno Stecca, Andrea Sellaroli – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel. 338 6416432 – e-mail: info@mathesis.verona.it – lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 295 – Pubblicato il 04 - 04 - 2022

Quanti elementi ha un insieme infinito?

Lorenzo Luperi Baglini [1]

[*Segue dal numero* 294]

Però le uguaglianze qui sopra mostrano che $\alpha+1$ è un ordinale (è il più piccolo ordinale infinito):

$$\alpha+1 = num(\mathbb{N}_0) = num(\{x \in Ord \mid x < \alpha\})\,.$$

Induttivamente, è facile provare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, anche $\alpha + 1 + n$ è una numerosità ordinale. Più in generale, è possibile dimostrare il seguente:

Teorema 2.4.2. Dati $\sigma, \tau \in Ord$ *vale*:

$$num(\Omega_\sigma) + num(\Omega_\tau) = num(\Omega_{\sigma+\tau});$$
$$num(\Omega_\sigma) \cdot num(\Omega_\tau) = num(\Omega_{\sigma\,\cdot\,\tau}).$$

In particolare Ord è chiuso per somme e prodotti.

Le operazioni tra numerosità ordinali sono la restrizione delle operazioni tra numerosità, che non sono altro che la restrizione alle numerosità delle operazioni tra ipernaturali; in particolare, quindi, sono commutative. Invece le operazioni tra ordinali di Cantor (che qui denoteremo come *COrd* e scriveremo sempre nella forma barrata $\bar{\sigma}$, per non confonderli con le numerosità ordinali) sappiamo non avere analoghe buone proprietà algebriche. Una domanda sorge spontanea: come è possibile?

Per capire a cosa corrispondano le operazioni tra numerosità ordinali, ricordiamo che ogni ordinale di Cantor $\bar{\sigma}$ ha un'unica forma normale, data da

$$\bar{\sigma} = \sum_{n=0}^{m} \bar{\omega}^{j_n} a_n$$

dove $a_n \in \mathbb{N}$ e $n_1 < n_2 \Longrightarrow j_{n_1} > j_{n_2}$. In forma normale, ogni ordinale è scritto come se fosse un polinomio in $\bar{\omega}$; in questa rappresentazione, simulando le operazioni tra polinomi si introducono le cosiddette operazioni tra ordinali di Cantor in forma normale: se

$$\bar{\sigma} = \sum_{n=0}^{m} \bar{\omega}^{j_n} a_n \quad \text{e} \quad \bar{\tau} = \sum_{n=0}^{m} \bar{\omega}^{j_n} b_n\,,$$

si pone

$$\bar{\sigma} \oplus \bar{\tau} = \sum_{n=0}^{m} \bar{\omega}^{j_n}(a_n + b_n) \quad \text{e} \quad \bar{\sigma} \otimes \bar{\tau} = \bigoplus_{n,h=0}^{m}\, a_n b_h\, \bar{\omega}^{j_n \oplus j_h}\,,$$

Sia ora $\Phi\colon Ord \longrightarrow COrd$ la mappa che associa a ogni numerosità ordinale il suo tipo d'ordine:

$$\Phi(\tau) = ot(\Omega_\tau).$$

Il risultato che chiude il cerchio nelle relazioni tra cardinalità, ordinali e numerosità è il seguente:

Teorema 2.4.3. *La mappa* Φ *costituisce un isomorfismo di semianelli tra* $(Ord, +, \cdot)$ *e* $(COrd, \oplus, \otimes)$, *in particolare*

$$\Phi(\sigma+\tau) = \bar{\sigma} \oplus \bar{\tau}\,, \qquad \Phi(\sigma \cdot \tau) = \bar{\sigma} \otimes \bar{\tau}\,.$$

In particolare, l'identificazione degli ordinali di Cantor con le numerosità ordinali permette di interpretare le operazioni naturali tra ordinali di Cantor in termini di grandezze di insiemi infiniti a priori, anziché trattarle puramente in maniera algebrica; inoltre, mettendo insieme le varie relazioni discusse, si ha che le cardinalità si possono vedere come particolari numeri ordinali, i numeri ordinali si possono vedere come particolari numerosità e le numerosità stesse possono vedersi come cardinalità nonstandard. Quindi le numerosità forniscono una teoria della grandezza che generalizza gli ordinali con migliori proprietà algebriche, rispondendo positivamente alla domanda che ci eravamo posti nell'introduzione.

Note: [1] Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano, email: *lorenzo.luperi@unimi.it*.

Riferimenti bibliografici: [B1] Benci V., *I numeri e gli insiemi etichettati*, Conferenze del seminario di matematica dell'Università di Bari, vol. 261, Laterza, Bari 1995. [B2] Benci V., Di Nasso M., *Numerosities of labelled sets: a new way of counting*, Adv. Math. 21 (2003), pp. 505–67. [B3] Benci V., Di Nasso M., Forti M., *An Aristotelian notion of size*, Ann. Pure Appl. Logic 143 (2006), pp. 43–53. [B4] Benci V., Di Nasso M., *How to measure the infinite: Mathematics with infinite and infinitesimal numbers*, World Scientific, Singapore, 2018. [B5] Benci V., Luperi Baglini L., *Euclidean numbers and numerosities*, in preparazione. [B6] Di Nasso M., Forti M., *Numerosities of point sets over the real line*, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), pp. 5355–5371. [B7] Forti M., Morana Roccasalvo G., *Natural numerosities of sets of tuples*, Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2015), pp. 275–292.

Questo lavoro è stato presentato dall'autore durante la X Giornata nazionale di Analisi non Standard tenutasi a Verona il 13 marzo 2021. Sono in corso di pubblicazione gli Atti del convegno curati da Bruno Stecca e Daniele Zambelli del gruppo di NSA di Verona.

Dante comunicatore della scienza

Gian Italo Bischi [*]

Sommario. In questo articolo vengono scelti e commentati alcuni passi della *Divina Commedia* riguardanti la scienza medievale, inserendoli nel contesto di un vero e proprio programma di comunicazione del sapere delineato da Dante Alighieri attraverso le pagine del *De Vulgari Eloquentia* e del *Convivio*. Gli esempi riportati mostrano da una parte la profonda conoscenza di Dante riguardo ai concetti e metodi delle scienze matematiche, fisiche e naturali, dall'altra illustrano certe soluzioni adottate dal Poeta per trasmettere queste conoscenze, non solo con l'efficace utilizzo di analogie e metafore ma anche attraverso narrazioni e con dialoghi, anticipando così certi metodi per comunicare la scienza utilizzati da diversi autori dopo di lui, fino ai giorni nostri.

Parole chiave: Dante Alighieri, Comunicazione della scienza, *Divina Commedia*.

1. Introduzione

In occasione del 700° anniversario della morte di Dante Alighieri (Firenze 1265 - Ravenna 1321) in questo lavoro si analizza il suo ruolo di comunicatore della scienza, dove per comunicazione si intende la diffusione del sapere al di fuori della cerchia degli specialisti. Nelle pagine del *Convivio* e *De Vulgari Eloquentia* Dante aveva delineato un vero e proprio programma di divulgazione del sapere, poi messo in pratica nella *Divina Commedia*, come illustreremo attraverso alcuni esempi che se da una parte mostrano la profonda conoscenza di Dante su concetti e metodi delle scienze matematiche, fisiche e naturali, dall'altra illustrano certe soluzioni adottate dal Poeta per trasmettere queste conoscenze, non solo con l'efficace utilizzo di analogie e metafore ma anche attraverso narrazioni (lo "storytelling") arricchite con dialoghi, anticipando così certi metodi per comunicare la scienza utilizzati da diversi autori dopo di lui, fino ai giorni nostri.

Ma perché Dante sentiva tanta urgenza di trasmettere conoscenze elevate a un vasto pubblico? Il motivo principale è che in Europa, durante il XII e XIII secolo, ci fu un notevole recupero del sapere dell'antichità e anche produzione di nuovo sapere, favoriti da un'ingente opera di traduzione dal greco e dall'arabo in latino, in particolare a Toledo (in Spagna) e a Palermo (alla corte di Federico II di Svevia), due città in cui si era verificato un incontro di culture araba, greca e latina che prosperarono fianco a fianco per molti anni. Tra gli autori tradotti c'erano Aristotele, Tolomeo, Euclide, Archimede, Alhazen e Al-Khwarizmi, oltre a testi cinesi e indiani importati in Europa attraverso versioni arabe. Questo innescò la creazione di una rete di università che usavano il latino come lingua franca e favorì un intenso scambio internazionale di testi e studiosi. Le università di Oxford, Coimbra, Parigi, Montpellier, Bologna e Salerno furono fondate nel XII secolo, e quelle di Cambridge, Salamanca, Tolosa, Orléans, Napoli e Padova nel XIII secolo (si veda ad esempio Pietro Greco, 2014). In queste università le arti del Trivio (grammatica, retorica, dialettica) e del Quadrivio (aritmetica, geometria, musica, astronomia) divennero materie comuni a tutti gli studenti.

Allo stesso tempo, in particolare nel XIII secolo, vennero create in molte città italiane scuole d'abaco, frequentate dalle classi emergenti di mercanti, artigiani, artisti, banchieri e dai loro figli. In queste scuole la lingua e la scrittura italiana popolare (il volgare), così come la matematica di base, la contabilità, la meccanica e altre materie, venivano insegnate essenzialmente per scopi pratici, soprattutto attraverso esempi. Anche se non ci sono informazioni, né documenti, sulla prima formazione di Dante, riteniamo probabile che abbia frequentato questo tipo di scuola da bambino, essendo figlio di un mercante. Inoltre, data la notevole cultura e curiosità mostrate da Dante nelle sue opere, si pensa che abbia frequentato, da adulto, anche alcune lezioni nelle università di Bologna e Padova, forse anche a Parigi. Queste congetture sulla sua formazione sono in parte suggerite dal fatto che nelle sue opere mostra familiarità con entrambi i tipi di conoscenza – quella più teorica insegnata in latino nelle università e quella più pratica insegnata in lingua volgare nelle scuole d'abaco.

Nel XIII secolo anche nuove conoscenze e nuovi testi (in latino) si diffusero in Europa, dal *Liber Abaci* di Leonardo Pisano (Fibonacci) all'*Ottica e Matematica* di Roberto Grosseteste, fino al *Trattato di Astronomia e Astrologia* di Giovanni Sacrobosco e le *Summulae Logicales* di Pietro di Spagna (Petro Hispanus) solo per citarne alcuni. Tutti testi indirizzati a un'élite intellettuale. In effetti, molti studiosi avevano un'idea piuttosto esclusiva riguardo alla diffusione del sapere, specialmente per la filosofia e la scienza (detta anche filosofia naturale). Questa era, per esempio, l'opinione dello studioso islamico Averroè (Cordova 1126 - Marrakech 1198), un famoso filosofo, medico e giudice, autore di trattati su Aristotele, il quale affermava che insegnare alle persone umili era uno sforzo sprecato, e persino pericoloso perché poteva portare a malintesi ed essere fonte di scoraggiamento e umiliazione per coloro che non avevano gli strumenti per capire. Dante esprimeva invece un'opinione molto diversa, un'idea democratica della conoscenza, che deve essere offerta a tutti con strumenti diversificati, e avvalorò questa opinione nel *Convivio* (scritto in volgare) e nel *De Vulgari Eloquentia* (in latino).

Il *Convivio*, che significa banchetto, una tavola che offre ai partecipanti il difficile "cibo" della conoscenza, è una sorta di enciclopedia in cui Dante spiega i grandi temi filosofici del suo tempo in un linguaggio comprensibile anche ai non specialisti: temi che vanno dalla linguistica alla scienza, dalla cosmologia alla politica. Nella prefazione Dante afferma che «tutti gli uomini desiderano naturalmente conoscere» e che «la scienza è l'ultima perfezione della nostra anima». In esso mostra anche una profonda considerazione per la matematica, attraverso alcune interessanti analogie. Ad esempio la seguente (*Convivio* II, 13):

«*E 'l cielo del Sole si può comparare all'Arismetrica per due proprietadi, l'una si è, che del suo lume tutte l'altre stelle s'informano; l'altra si è, che l'occhio nol può mirare. E queste due proprietadi sono nell'Arismetrica, ché del suo lume tutte le scienze s'alluminano ... L'altra proprietà del Sole ancora si vede nel numero, ché l'occhio dello intelletto nol può mirare: perocché il numero, quando è in sé considerato è infinito; e questo non potemo noi intendere*».

Ovvero, come il Sole illumina tutti i pianeti ma non può essere guardato perché troppo luminoso, così la matematica illumina tutte le altre scienze ma il nostro intelletto non può intenderla pienamente in quanto ha a che fare con grandezze infinite.

Oppure quella, altrettanto famosa, riguardante l'analogia fra la Geometria e Giove (*Convivio* XIII, 25-27):

«*E lo cielo di Giove si può comparare a la Geometria per due proprietadi: l'una si è che muove tra due cieli repugnanti a la sua buona temperanza, sì come quello di Marte e quello di Saturno; onde Tolomeo dice, ne lo allegato libro, che Giove è stella di temperata complessione, in mezzo de la freddura di Saturno e de lo calore di Marte; l'altra si è che intra tutte le stelle bianca si mostra, quasi argentata. E queste cose sono ne la scienza de la Geometria. La Geometria si muove intra due repugnanti a essa, sì come 'l punto e lo cerchio – e dico 'cerchio' largamente ogni ritondo, o corpo o superficie -; ché, sì come dice Euclide, lo punto è principio di quella, e, secondo che dice, lo cerchio è perfettissima figura in quella, che conviene però avere ragione di fine. Sì che tra 'l punto e lo cerchio sì come tra principio e fine si muove la Geometria, e questi due a la sua certezza repugnano; ché lo punto per la sua indivisibilità è immensurabile, e lo cerchio per lo suo arco è impossibile a quadrare perfettamente, e però è impossibile a misurare a punto. E ancora la Geometria è bianchissima, in quanto è sanza macula d'errore e certissima per sé e per la sua ancella, che si chiama Perspettiva*».

Nel *De Vulgari Eloquentia* Dante esamina invece il problema della lingua più adatta a diffondere il sapere in modo universale, chiaro ed efficace. È scritto in latino in quanto diretto principalmente ai dotti dell'epoca, per mostrare loro l'utilità dell'«ottimo discorso volgare, comune a tutti gli italiani, che si può imparare senza altre regole imitando la nutrice», ovvero la lingua madre. In questo libro Dante analizza anche le strutture metriche più adatte alla forma poetica del canto, un genere letterario che, grazie al suo metro e all'uso della rima, permetteva a Dante di realizzare un poema adatto alla lettura ad alta voce e facilmente memorizzabile, in modo che potesse essere imparato e ripetuto anche dagli analfabeti. Questo è proprio ciò che Dante metterà in pratica nella *Commedia*, chiamata *Divina* dal Boccaccio.

Vale la pena sottolineare che Dante individua anche un'altra difficoltà che stava emergendo nel XIII secolo, riguardante la specializzazione delle lingue all'interno delle varie professioni, anticipando così un problema che sarebbe diventato in seguito un grande ostacolo alla diffusione della conoscenza, come sottolineato da C.P. Snow nel famoso saggio *Le due culture* del 1959. Per descrivere questo problema, nel *De Vulgari Eloquentia* Dante propone una sua personale rielaborazione della nota leggenda biblica della Torre di Babele, dove l'influenza di Dio che confonde le lingue viene sostituita da una spiegazione endogena, o evolutiva, della differenziazione delle lingue.
[*Segue al numero* 296]

[*] Università degli Studi di Urbino Carlo Bo
email: gian.bischi@uniurb.it

Nota: Questo lavoro è stato presentato dall'autore a Verona il giorno 27 novembre 2021 durante il 3° Congresso nazionale di Matematica della Federazione Italiana Mathesis tenutosi nelle città di Verona e di Firenze nei giorni 12-13-27 novembre e 4 dicembre del 2021. Sono in corso di pubblicazione gli Atti del congresso curati da Carlo Toffalori (Unicam), Aniello Buonocore (Unina "Federico II"), Giangiacomo Gerla (Unisa), Liliana Restuccia (Unime) dove potrete trovare anche il presente articolo.

LA FUNZIONE CARATTERISTICA DEI MOMENTI

(*L. C.*) Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione $F_X(x)$ e con momenti dall'origine e centrali finiti rispettivamente uguali a:

$$\mu_k = M(x^k), \qquad \bar{\mu}_k = M(x-\mu)^k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,,$$

dove M è la funzione media aritmetica del momento di ordine k di X e μ è la media aritmetica di X. La funzione caratteristica di X è la trasformata di Eulero-Fourier di X.

$$\mathcal{C}(t) = M\left(\mathrm{e}^{itX}\right), \qquad t \in \mathbb{R},\ \ i^2 = -1.$$

È una funzione olomorfa e ha la proprietà di generare tutti i momenti di una v.a. X. La $\mathcal{C}(t)$, data una variabile aleatoria X, esiste sempre.