

1. MA IN CHE ANNO SIAMO?

Quale numero è la metà di 4^{2024} ?

- A) 4^{1012} B) 4^{2023} C) 2^{2024} D) 2^{4047} E) 2^{1012}

Risposta esatta D)

Usando le proprietà delle potenze si può scrivere $4^{2024} = 2^{4048}$.

A questo punto la metà è $2^{4048} : 2 = 2^{4047}$ sempre utilizzando le proprietà delle potenze.

2. CON SOMMO PIACERE

Indichiamo con ab la scrittura decimale di un numero di due cifre; la cifra delle decine "a" è diversa da zero mentre la cifra delle unità "b" può assumere tutti e dieci i possibili valori.

Troviamo, se esistono, due numeri di due cifre ab e cd che sommati danno $ab+cd = 87$.

Quanto vale la somma $S = ab + ad + cb + cd$?

- A) S dipende dai valori specifici di a e di b
B) S ha sempre lo stesso valore
C) Non è possibile trovare la somma S con i dati disponibili
D) Non esistono valori di a, b, c, d per poter calcolare la somma S
E) Nessuna delle precedenti

Risposta esatta B)

Esplicitando la scrittura decimale con le decine e le unità si ottiene che $(10 \cdot a + b) + (10 \cdot c + d) = 87$.

La quantità da trovare è: $S = (10 \cdot a + b) + (10 \cdot a + d) + (10 \cdot c + b) + (10 \cdot c + d)$.

Togliendo le parentesi e applicando la proprietà commutativa della somma S risulta che:

$$S = (10 \cdot a + b) + (10 \cdot c + d) + (10 \cdot a + b) + (10 \cdot c + d) = 87 + 87 = 174.$$

Quindi la somma S risulta avere sempre lo stesso valore ed esistono diverse scelte di a,b,c,d per ottenerla (ad esempio $43+44$ o $51+36$ o $29+58$).

3. MEGLIO n UOVA OGGI CHE n-1 GALLINE DOMANI

Una ragazza vuole disporre in fila le uova che ha appena comprato.

Prima prova a disporle a due a due ma le avanza un uovo;

poi prova a disporle in file da tre ma avanza sempre un uovo;

quindi prova in file da quattro ma avanza sempre un uovo.

Infine disponendole in file da cinque riesce a non farne avanzare nessuno.

Quanto vale il numero MINIMO di uova che ha comprato la ragazza?

- A) meno di 9
B) più di 9 ma meno di 19
C) più di 19 ma meno di 39
D) più di 39 ma meno di 79
E) più di 79

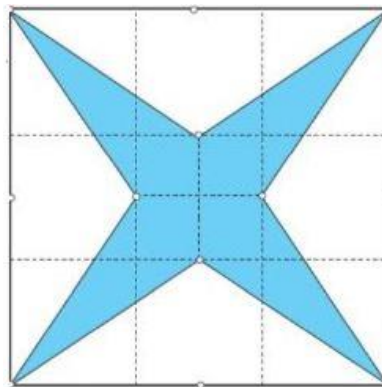
Risposta esatta C)

Il numero di uova deve superare di uno un multiplo di 12 e contemporaneamente essere un multiplo di cinque. (12 è il minimo comune multiplo tra 2, 3 e 4).
 Elencando i multipli di 5, il primo che è anche un multiplo di 12 più uno è 25.
 In generale ci sono infinite soluzioni positive e 25 è la minore ($25 = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1$)

4. UNO, DUE, TRE ... STELLA

Il quadrato grande in figura ha area 225 cm^2 ed è suddiviso in nove quadratini uguali tra di loro.
 La stella azzurra in figura si ottiene congiungendo i vertici del quadrato con i punti medi dei lati del quadratino centrale.
 Quanto vale l'area della stella azzurra?

- A) $225/2 \text{ cm}^2$
- B) $225/3 \text{ cm}^2$
- C) $225/4 \text{ cm}^2$
- D) Non ci sono dati sufficienti per calcolarlo
- E) 90 cm^2



Risposta esatta: B)

Conviene calcolare l'area della stella come differenza tra l'area del quadrato grande e la somma delle quattro aree uguali dei triangoli bianchi.

La base del triangolo bianco vale $\sqrt{225} = 15 \text{ cm}$, mentre l'altezza vale $15:3=5 \text{ cm}$.

L'area del singolo triangolo è $15 \cdot 5 : 2$.

La somma delle aree dei quattro triangoli è $4 \cdot 15 \cdot 5 : 2 = 150 \text{ cm}^2$.

L'area della stella è $225 - 150 = 75 \text{ cm}^2$, ossia un terzo del totale.

5. BENVENUTI A MATHLANDIA

Nella contea di Mathlandia, che ha la forma di un ottagono regolare, ci sono 8 città che si trovano ciascuna su un vertice del poligono. Si vogliono costruire delle strade in modo che ogni città sia direttamente collegata con ciascuna delle altre.

Lo scorso anno sono state costruite tutte e sole le strade che collegano tra di loro 4 città.

Quante strade devono ancora essere costruite per finire tutti i collegamenti?

- A) 6
- B) 12
- C) 16
- D) 28
- E) 22

Risposta esatta E)

Contiamo prima le strade già costruite: dalla prima città partono tre strade.

Dalla seconda ne partono altre tre ma una di queste è già stata contata tra le tre che partono dalla prima città. Dalla terza città partono sempre tre strade ma due di queste sono già state contate.

Dalla quarta città partono tre strade ma tutte e tre sono già contate nei casi precedenti.

In totale quindi le quattro città sono collegate da $3+2+1+0 = 6$ strade.

Con lo stesso ragionamento si calcolano le strade totali che devono collegare tutte e otto le città, ossia $7+6+5+4+3+2+1+0 = 28$.

Le strade che devono essere ancora costruite sono $28 - 6 = 22$.

6. PIENO – MEZZO – VUOTO

Una bottiglia di vetro piena d'acqua ha una massa totale di 1450 grammi.
Se invece la bottiglia contenesse acqua soltanto a metà allora la massa totale sarebbe 1075 grammi.
Quanto vale la massa in grammi della bottiglia di vetro vuota?

Risposta:

Facendo la differenza tra la bottiglia piena e la bottiglia semipiena si ottiene la massa di metà acqua:
 $1450 - 1075 = 375$ grammi.

Tutta l'acqua avrà massa $2 \cdot 375 = 750$ grammi.

La bottiglia vuota ha massa $1450 - 750 = 700$ grammi.

7. VADO AL MASSIMO, VADO A GONFIE VELE

Un'auto viaggia per 2 ore alla velocità di 130 km/h e successivamente per 3 ore alla velocità di 180 km/h. Qual è la velocità media durante tutto il percorso?

Risposta:

La velocità media è definita come spazio totale diviso tempo totale.

Non è vero in generale che la velocità media è uguale alla media aritmetica tra le velocità; ciò risulta vero solo nell'ipotesi in cui i tempi di percorrenza dei due tragitti siano gli stessi.

Per calcolare lo spazio totale: $S = 130 \text{ km/h} \cdot 2\text{h} + 180 \text{ km/h} \cdot 3\text{h} = 800\text{km}$.

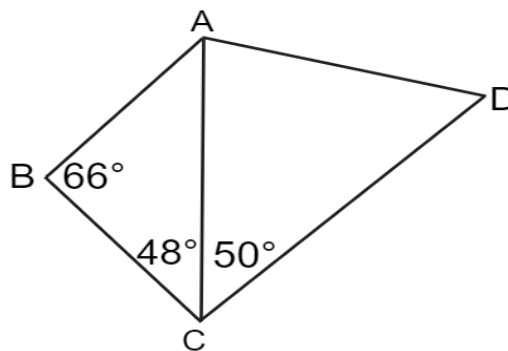
La velocità media è $800\text{km} : (2+3)\text{h} = 160\text{km/h}$.

8. BASTEREBBE UN GONIOMETRO?

Nel quadrilatero in figura si ha che $BC=AD$.

Calcolare l'ampiezza dell'angolo \widehat{CAD} .

(Il disegno non rispetta volutamente le proporzioni esatte e il quadrilatero non è un trapezio).



Risposta:

$$\widehat{CAB} = 180^\circ - 66^\circ - 48^\circ = 66^\circ.$$

Dunque il triangolo ABC è isoscele dato che ha due angoli congruenti.

In particolare $BC=AC$.

Ma dato che $BC=AD$ allora per la proprietà transitiva dell'uguaglianza risulta che $AC=AD$.

Quindi anche il triangolo ACD, avendo due lati congruenti, è isoscele.

Ne deriva che gli angoli alla base sono congruenti, ossia l'angolo $\widehat{CDA}=50^\circ$.

Infine $\widehat{CAD}=180-50-50=80^\circ$.

9. NON SERVE ESSERE UN'AQUILA... ... PER COSTRUIRSI UN AQUILONE

Vuoi costruire un aquilone con la tipica forma di quadrilatero costituito da due triangoli isosceli con la base in comune. La diagonale minore del quadrilatero è la base dei triangoli isosceli ed è costituita da una bacchetta di legno AC lunga 90 cm.

A partire dal punto medio di AC devi fissare altre due bacchette di legno che siano perpendicolari ad AC e che abbiano verso opposto tra di loro.

Queste due bacchette insieme formeranno la diagonale maggiore del quadrilatero.

Trovi una bacchetta di 81 cm e la utilizzi per realizzare una parte della diagonale maggiore.

Quanto dovrà essere lunga, in cm, la terza bacchetta che completa la diagonale maggiore se vuoi che gli angoli in \hat{A} e in \hat{C} del quadrilatero misurino 90° ?

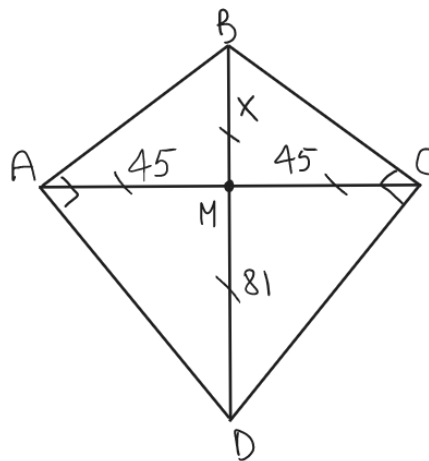
Risposta:

Considerando il triangolo rettangolo ABD in figura a fianco possiamo utilizzare il secondo teorema di Euclide.

$$AM^2 = DM \cdot MB$$

$$x = MB = 45^2 : 81 = 25 \text{ cm}$$

Alternativamente si può applicare più volte il Teorema di Pitagora.



10. BUONI O CATTIVI?

Nella contea di Mathlandia vivono soltanto i Buoni (ossia abitanti che sono sempre sinceri) e i Cattivi (ossia abitanti che mentono sempre). Davanti ad una gelateria ci sono due file di abitanti di Mathlandia che sono in attesa per prendere un gelato o una crepes.

Nella fila dei gelati ci sono 13 persone mentre in quella delle crepes ce ne sono 10.

Tutte le persone, esclusi i primi due di ciascuna fila, affermano:

“ Tra le persone davanti a me nella mia fila ci sono almeno due Cattivi ”.

Quanti sono in tutto i Buoni nelle due file?

Risposta:

Prendiamo la fila dei gelati: non è possibile che siano tutti abitanti Buoni poiché altrimenti tutti, tranne i primi due della fila, affermerebbero il falso (ossia che davanti a loro ci sono almeno due Cattivi). Ma i Buoni per definizione sono sinceri dunque non possono affermare il falso.

Non è nemmeno possibile che siano tutti Cattivi poiché altrimenti tutti, tranne i primi due della fila, direbbero qualcosa di vero (ossia che davanti a loro ci sono almeno due Cattivi).

Ma i Cattivi per definizione mentono sempre dunque non possono affermare il vero.

Dunque c'è almeno un Buono e almeno un Cattivo.

In realtà dato che c'è un Buono allora ci sono almeno due Cattivi (che sono davanti a lui).

Non possono esserci più di due Cattivi altrimenti, tranne i primi due, gli altri direbbero il vero.

L'unica possibilità è che ci siano esattamente due Cattivi in cima alla fila e dal terzo abitante in poi siano tutti Buoni. Stesso discorso per la fila delle crepes.

I Buoni in tutto sono $(13-2)+(10-2)=19$.