Soluzioni Triennio 2023

1. Quasi a sorte

Soluzione [4]

La quarta opzione. Mettendo un orecchino in ogni scatola e aggiungendo tutti gli anelli in una delle scatole, quattro quinti delle volte (80%) si ha la certezza che Vittoria peschi un orecchino, nel restante quinto c'è un sesto delle volte, pari ad un ulteriore $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = 3{,}33\%$ di probabilità che peschi un orecchino; in totale Vittoria è nella condizione di perdere l'83,33% delle volte. Allo stesso modo nella prima opzione la percentuale è del 50%, nella seconda del 60%, nella terza è l'80%.

2. Strane frazioni

Soluzione [$\frac{1}{470} + \frac{1}{5}$]

3. Le due circonferenze

Soluzione [$6 - 4\sqrt{2}$]

Se r è il raggio della circonferenza piccola, il suo centro è $(r;r)$.
Il centro della circonferenza grande è (2;2).
Allora per il teorema di Pitagora, si ha:

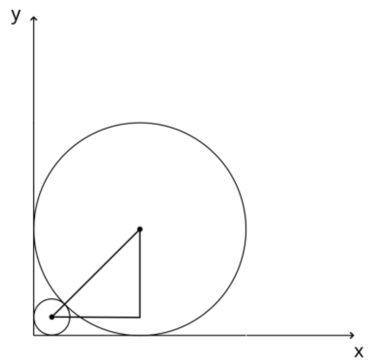
$(2-r)^2 + (2-r)^2 = (2+r)^2$

$2(2-r)^2 = 4 + r^2 + 4r$

$r^2 - 12r + 4 = 0 \qquad r = 6 \pm \sqrt{32}$

$r = 6 - 4\sqrt{2}$

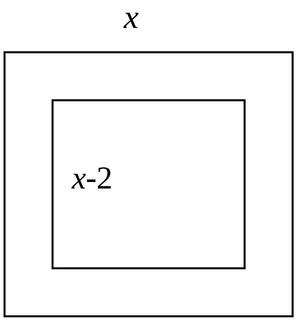
($r = 6 + 4\sqrt{2}$ non accettabile poiché $r < 2$)



4. L'aiuola

Soluzione [144 m^2]

Sia x il lato dell'aiuola quadrata, x-2 è il lato del quadrato rimanente, $x > 2$
Si ha $(x-2)^2 = x^2 - (x-2)^2 + 56$ cioè $x^2 - 4x + 4 = 4x - 4 + 56$
ovvero $x^2 - 8x - 48 = 0$ che ammette come soluzioni $x = 12$ e $x = -4$
Pertanto l'area cercata è 144 m^2



5. Vita al Campus

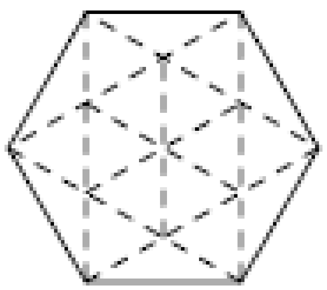
Soluzione:

Studenti	**Piano**	**Studi**
David	primo	Storia
John	secondo	Medicina
Stephanie	terzo	Farmacia
Sarah	quarto	Economia

Sapendo che Shephanie e David stanno o al primo o al terzo piano, John e Sarah stanno al secondo o al quarto piano. Ma John non può stare al quarto piano (perché ha sopra chi studia Farmacia) e quindi è al secondo piano e Sarah è al quarto piano. Sarah non studia Medicina (è ragazza) ed essendo al quarto piano non studia né Storia, né Farmacia. Pertanto Sarah è al quarto piano e studia Economia. John è al secondo piano e studia Medicina (non può studiare Economia, né Storia né Farmacia). Sapendo che Stephanie non studia Storia allora studia Farmacia ed è al terzo piano. Infine David è al primo piano e studia Storia.

6. Il tavolo di Paolo

Tracciando le linee indicate in figura si verifica che l'esagono viene diviso in 18 triangoli equivalenti. Infatti le diagonali uscenti da ciascun vertice dividono la diagonale congiungente i due vertici adiacenti a quello scelto in 3 parti uguali e i sei triangoli ottusangoli hanno la stessa base e la stessa altezza dei triangoli equilateri. Poiché l'area del poligono stellato è data dalla somma delle aree dei 12 triangoli equilateri (tutti uguali fra loro), il rapporto fra le aree è $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

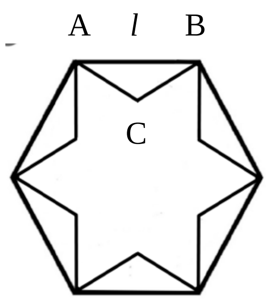


Oppure:

Sia l il lato dell'esagono regolare.

Allora l'apotema = $\frac{\sqrt{3}}{2} l$

e l'area dell'esagono regolare = $(6l) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} l\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2$



Altezza del triangolo ottusangolo ABC (30°,120°,30°) = $\frac{l}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$

Area del triangolo ABC = $\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12} l^2$

Area poligono stellato = $\frac{3\sqrt{3}}{2} l^2 - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} l^2 = \sqrt{3} \cdot l^2$

Rapporto tra le due aree è $\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} l^2}{\sqrt{3} \cdot l^2} = \frac{3}{2}$

7. I diversi formati

Soluzione [a) 118,9 cm e 84,1 cm b) 29,7 cm e 21,0 cm]

Sia x la misura (in cm) del lato più corto ed y la misura (in cm) del lato più lungo del foglio A0.

Si ha $\begin{cases} x \cdot y = 10^4 \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{\frac{y}{2}} \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x \cdot y = 10^4 \\ y^2 = 2x^2 \end{cases}$ e $y^2 = 2 \cdot \dfrac{10^8}{y^2}$ $\quad y^4 = 2 \cdot 10^8$ $\quad y = 10^2 \cdot \sqrt[4]{2}$

ovvero $y \cong 118{,}9$ cm ed $x = \dfrac{10^2}{\sqrt[4]{2}} \cong 84{,}1$ cm

b) I lati del foglio A4 sono $\dfrac{1}{4}$ di quelli del formato A0. Pertanto misurano 29,7 cm e 21,0 cm

8. I due motociclisti

Soluzione [15]

Sia n il numero di giri compiuti da Aldo, (n - 1) quelli di Dario, in 21 minuti. Aldo in 21 minuti = 1260 secondi compie n giri e pertanto un singolo giro in $\dfrac{1260}{n}$ secondi, mentre Dario compie un singolo giro in $\dfrac{1260}{n-1}$ secondi. Allora $\dfrac{1260}{n-1} - \dfrac{1260}{n} = 6$

$1260n - 1260(n-1) = 6n(n-1)$

$n^2 - n - 210 = 0$ che ha come soluzioni 15 e -14

9. I castelli di carta

Soluzione [5; $\dfrac{3n^2 + n}{2}$]

A) Per costruire il castello ad 1 piano occorrono 2 carte (disposte a forma di **V** rovesciata); per costruire il castello a due piani occorrono 2 carte + 5 carte per il piano sottostante (due **V** rovesciate e 1 carta orizzontale; per il castello a tre piani occorrono 2 + 5 + 8 (tre **V** rovesciate e 2 carte orizzontali). E così via, per il castello di 4 piani occorrono 2 + 5 + 8 + 11 = 26 carte; per costruire il castello di 5 piani occorrono 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40 carte

B) Per costruire n piani: 2 carte (per l'ultimo piano), $2 + (n-1) \cdot 3$ (per il primo piano), pertanto occorrono $\left[2 + (2 + (n-1) \cdot 3)\right] \cdot \dfrac{n}{2} = \dfrac{2n + 2n + 3n^2 - 3n}{2} = \dfrac{3n^2 + n}{2}$ carte

10. La fortuna di Flavio

Soluzione [$\frac{1}{20}$]

Possiamo interpretare il mettere il cioccolatino in un sacchetto come lo scegliere quel sacchetto una volta, il mettere due cioccolatini in un sacchetto come scegliere quel sacchetto due volte e così via…
Allora una distribuzione dei 3 cioccolatini nei 4 sacchetti la posso vedere come una scelta di 3 sacchetti tra i 4 possibili, cioè come una combinazione con ripetizione di 4 oggetti presi 3 alla volta.
Dunque i casi possibili sono $C^r{}_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$, mentre il caso favorevole è soltanto uno (tutti e 3 i cioccolatini nel primo sacchetto). Pertanto $p = \frac{1}{20}$

Oppure:

I casi possibili con nessun cioccolatino nel primo sacchetto sono 10 (es. 0111, 0120, 0210, ..); i casi possibili con soltanto un cioccolatino nel primo sacchetto sono 6 (es. 1110, 1101, 1011, ..) ; i casi possibili con 2 cioccolatini nel primo cassetto sono 3 (2100, 2010, 2001) e soltanto un caso è possibile con 3 cioccolatini nel primo cassetto (che è l'unico caso favorevole).
Pertanto $p = \frac{1}{10+6+3+1} = \frac{1}{20}$