Premio Città di Terni

(trentaduesima edizione)

Scuola Secondaria di I grado – Soluzioni

1) TIZIO, CAIO, SEMPRONIO E VALENTINO

Siano a, b, c > 20 le età dei 3 amici il 14-02-26. Il 14-02-12 ciascuno di loro 3 aveva esattamente 14 anni in meno e quindi complessivamente 42 in meno. Quattro giorni prima del loro compleanno, il 10-02-12, la loro età approssimata per difetto era ancora un anno in meno.
137 – 3 x 14 – 3 x 1 = **92**.
(Osservazione: il dato a, b, c > 20 non è inutile. Infatti se fosse stato ad esempio a = 12 allora non avrebbe avuto senso togliere 14 anni dato che l'età si conta a partire da 0.)

2) DA ADELAIDE A SOFIA

Adelaide mangia 10 bignè ogni ora, ossia 1 bignè in 6 minuti. Sofia mangia invece 1 bignè ogni 4 minuti. In 12 minuti quindi mangiano complessivamente 2+3=5 bignè.
Per calcolare i minuti x impiegati per mangiare 30 bignè basta risolvere la proporzione:
30 : 5 = x : 12 minuti che ha come soluzione x = **72 minuti**

3) LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA È QUANTA SOLUZIONE C'È!

Dato che i liquidi vengono completamente mischiati ogni bottiglia contiene:
1500 : 2 = 750 ml di acqua e 500 : 2 = 250 ml di alcool.
La massa in grammi di acqua x e la massa in grammi di alcool y in una bottiglia valgono:
750 ml : x = 1000 ml : 1000 g, 250 ml : y = 1000 ml : 800 g, ossia: x = 750 g, y = 200 g
la massa totale vale quindi **950 g**.

4) È ORA DI GUIDARE!

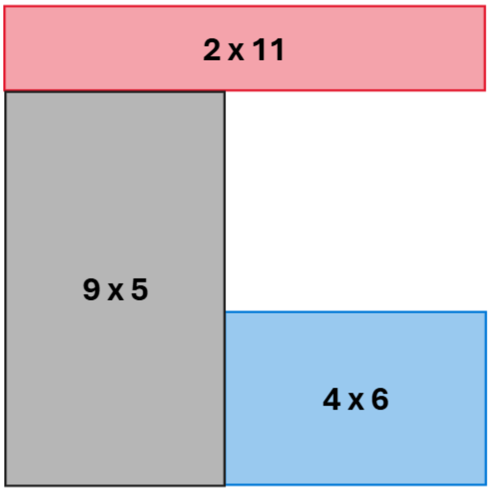
Se la lancetta delle ore fosse ferma mentre scorre quella dei minuti allora ci sarebbero esattamente 4 spicchi di angolo giro (sui 12 totali) a separare le lancette. L'angolo tra le due sarebbe quindi 120°. Ma dato che in 10 minuti la lancetta dei minuti copre due spicchi, ossia 1/6 dell'angolo giro, allora la lancetta delle ore avrà percorso 1/6 di spicchio. Quindi l'angolo con cui la lancetta delle ore si sposta "dalle 10 alle 11" è di (1/6) x (1/12) x 360 = 5°.
L'angolo convesso è quello minore a 180° e quindi corrisponde a 120° - 5° = **115°**.

5) MARCO IL PRECISINO

La cifra 2 compare nei numeri 2, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 25, …
Quando Marco arriva al numero 23, la cifra 2 compare per la 7° volta (sul 22 compare 2 volte).
Da qui in poi qualsiasi altro numero va bene.
La cifra 3 compare nei numeri: 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, …
Quando Marco arriva al numero 33, la cifra 3 compare per l'8° volta, il che è troppo. Quindi vuol dire che l'ultimo numero a cui può fermarsi è 32 (fin qui la cifra 3 compare 6 volte) e tutti i numeri prima vanno bene.
Mettendo insieme le due informazioni otteniamo che le soluzioni sono i 10 numeri naturali compresi tra 23 e 32 inclusi, ossia: **23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32**

6) PER FARE UN QUADRATO CI VOGLIONO DEI RETTANGOLI

La prima osservazione da fare è che i rettangoli non possono essere "storti", ossia orientati con un'inclinazione diversa da quella del quadrato. Inoltre il lato minimo del quadrato deve essere almeno 11, dato che una misura di uno dei rettangoli vale proprio 11.
Per trovare una soluzione in modo costruttivo si può osservare che: 6 + 5 = 2 + 9 = 11.
In questo modo possiamo posizionare i rettangoli come nel disegno a lato.
Lo spazio rettangolare che rimane vuoto è proprio un rettangolo di dimensioni **5 x 6.**
Un'altra plausibile soluzione sembrerebbe essere quella che usa 2 + 4 + 5 = 11, ma ci si convince facilmente che la figura che rimane fuori non è un rettangolo.



Osservazione: Per mostrare che non ci sono altre soluzioni con lati maggiori di 11 si può provare ad accostare in qualsiasi modo un lato adiacente a quello da 11 e notare che si verranno sempre a formare degli incastri a "zig-zag". Ciò non permette di ottenere uno spazio vuoto che abbia forma rettangolare (non è richiesta una dimostrazione formale dagli studenti).

PREMIO PROF. BARBANERA

7) PRENDO UN TRENO CHE VA … A TOPOLINIA CITTA'

Ogni treno impiega un'ora per andare da una stazione all'altra. Quindi due treni che partono da stazioni diverse si incontrano se e solo se partono con meno di un'ora di differenza. In più, dato che vogliamo che gli incontri avvengano entro le 14.00, dobbiamo aggiungere un'ulteriore condizione. Sicuramente si possono escludere tutti i treni che partono dalle 14.00 in poi.
Organizziamo i dati in una tabella a doppia entrata come la seguente:

Un incrocio verde della tabella sta a indicare che i relativi treni della riga e colonna si sono incontrati e il numero 1 indica che l'incontro va contato una volta.
In base alle osservazioni fatte sopra le caselle verdi saranno quelle per cui:
a) gli orari di partenza sono sfasati di un intervallo temporale minore di 60';
b) il treno che parte più tardi arriva alla stazione finale prima delle 14.00.

Un incrocio rosso sta a indicare che i relativi treni di riga e colonna non si sono incontrati e il numero 0 sta a indicare che l'incontro non va contato.
In base alle osservazioni fatte sopra le caselle rosse sono quelle per cui gli orari di partenza sono sfasati per più di 60'.

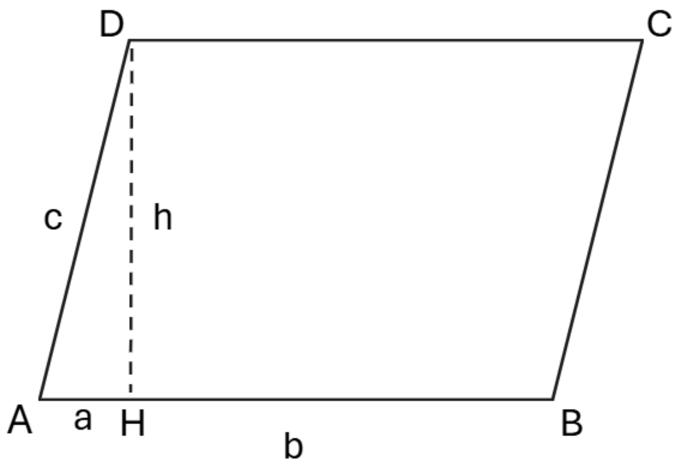
P \ T	12.10	12.30	12.50	13.10	13.30	13.50
12.00	1	1	1	0	0	0
12.20	1	1	1	1	0	0
12.40	1	1	1	1	1	0
13.00	1	1	1	1	1	1
13.20	0	1	1	?	?	?
13.40	0	0	1	?	?	?

Rimangono da valutare le 6 caselle gialle che per ora sono incerte.
Occorre trovare una condizione aggiuntiva per capire quali diventano verdi e quali rosse.
La condizione è il numero di minuti per cui un treno è in viaggio dal momento in cui parte a quando scoccano le ore 14:00 (chiamiamo questa quantità T).
Infatti 2 treni A e B si incontrano entro le 14:00 se e solo se $T_A + T_B > 60'$.
Il motivo di ciò è che tutti i treni hanno la stessa velocità e quindi se un treno impiega un'ora per fare tutto il viaggio allora lo stesso rimane vero anche per due treni che viaggiano contemporaneamente (sommando i tempi di percorrenza).
Ad esempio quelli delle 13:10 e 13:20 si incontrano perché: $T_A + T_B = 50' + 40' = 90' > 60'$,
mentre quelli delle 13:40 e 13:30 non si incontrano perché: $T_A + T_B = 20' + 30' = 50' < 60'$.

Usando questo criterio possiamo cambiare lo status delle caselle gialle. In particolare il treno delle 13:20 riesce a incontrare quelli delle 13:10 e delle 13:30, ma non quello delle 13:50; mentre quello delle 13:40 riesce a incontrare solo quello delle 13:10.
La somma totale (sommando i totali delle righe) è: 3 + 4 + 5 + 6 + 4 + 2 = **24**.

8) IL PARALLELOGRAMMA È TUTTO INTERO

Basandoci sul disegno in figura e usando le relative lettere iniziamo scrivendo varie relazioni:
$\overline{AB} = b$
$\overline{AH} = a$ (H proiezione di D su AB)
$\overline{DH} = h$
$\overline{AD} = c$
$c^2 = a^2 + h^2$ (Pitagora su AHD)
$2p = b + c + b + c = 28$, ossia: $b + c = 14$
$A = b \times h$
Dato che tutte le quantità devono essere intere positive, allora c può valere al massimo 13; inoltre, dovendo essere l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, può assumere valori in base alle possibili terne pitagoriche.
Le terne pitagoriche con ipotenusa minore o uguale a 13 sono le seguenti:



3, 4, 5 (primitiva); 6, 8, 10 (derivata dalla precedente); 5, 12, 13 (primitiva)
Costruiamo una tabella in cui inseriamo tutti i possibili valori di c, a, h, b, A dove le lunghezze sono espresse in metri e l'area in metri quadrati. Ci sono **6** soluzioni.

c	a	h	b = 14 – c	**A = b x h**
5	3	4	9	**36**
5	4	3	9	**27**
10	6	8	4	**32**
10	8	6	4	**24**
13	5	12	1	**12**
13	12	5	1	**5**

Osserviamo che geometricamente sono accettabili anche le soluzioni in cui a > b.